

Текстовые задачи с одной величиной и пропорциональной зависимостью величин

Под текстовой задачей будем понимать задачу, использующую нематематические слова для передачи математического смысла. Школьные текстовые задачи можно разделять по разным основаниям. Для нас представляют интерес такие деления, которые учитывают различия в методах решения. Первым таким делением является деление по количеству величин, использованных в условии. В результате получаем два класса задач — задачи с одной величиной и задачи с пропорциональной зависимостью величин.

Анализ условий задач с одной величиной показывает, что базовыми задачами являются задачи с двумя объектами, а в условиях таких задач используются как абсолютные значения a_1 и a_2 такой величины a , так и их сумма $a_1 + a_2$, разность $a_1 - a_2$, частное $a_1 : a_2$. Назовём $a_1, a_2, a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_1 : a_2$ характеристиками задачи. Логический анализ задач с одной величиной позволяет выделить семь их типов.

Базовыми задачами с пропорциональной зависимостью величин являются задачи с двумя процессами. Как и в условиях задач с одной величиной, в условиях задач с пропорциональной зависимостью величин используются значения этих величин, а также сумма этих значений и результаты разностного и кратного сравнения значений.

Если зависимость между тройкой величин a, b, c задать формулой $a = bc$, то условиями задачи с пропорциональной зависимостью величин могут:

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, a_1 : a_2, b_1 : b_2, c_1 : c_2$.

Эти 15 чисел назовём характеристиками задачи с пропорциональной зависимостью величин.

Деление задач с пропорциональной зависимостью величин сначала проведём по количеству значений величин a, b, c . В результате получим такие классы:

- 1) задачи с четырьмя значениями переменных;
- 2) задачи с тремя значениями переменных;
- 3) задачи с двумя значениями переменных;
- 4) задачи с одним значением переменных;
- 5) задачи без значений переменных.

1) Простейшая задача с пропорциональной зависимостью величин описывает два процесса. Тривиальное их описание означает указание шести именованных чисел: $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$. Но это избыточное описание, так как указанные числа связаны двумя зависимостями $a_1 = b_1 c_1$ и $a_2 = b_2 c_2$. И поэтому указание любых двух значений тройки (a_1, b_1, c_1) и любых двух значений тройки (a_2, b_2, c_2) позволяет найти недостающие два значения, и тем самым получить полное описание каждого из процессов. Задачи на нахождение одного из трёх чисел, связанных пропорциональной зависимостью, по данным двум числам решаются в начальной школе. Используются они и в пятом классе с усложнением некоторым дополнительным условием. Понятно, что задачи с четырьмя какими-либо независимыми характеристиками $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, описывающими два процесса, сводимы к указанным здесь задачам.

2) Среди четырёх характеристик задачи могут быть как абсолютные значения

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \quad (1)$$

так и какие-нибудь из характеристик

$$a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2, a_1 : a_2, b_1 : b_2, c_1 : c_2. \quad (2)$$

К этому классу относятся задачи, которые содержат только одну из характеристик (2) и, следовательно, три какие-нибудь из характеристик (1). Все такие задачи сво-

димы к задачам предыдущего типа, если любая тройка характеристик из рассматриваемой четвёрки содержит независимые характеристики.

3) Этот класс содержит задачи, в условиях которых даны два значения каких-либо переменных пропорциональной зависимости величин и ещё две какие-нибудь характеристики из (2). Отметим, что характеристики из (2) связаны с разными переменными, так как в противном случае полученная задача легко сводится к задаче с четырьмя значениями переменных. Пусть, например, в задаче даны характеристики $a_1 + a_2$, $a_1 - a_2$, b_2 , c_1 . Тогда первые две характеристики позволяют найти отдельные значения a_1 и a_2 , и с учётом данных характеристик b_2 и c_1 получаем задачу типа a_1 , a_2 , b_2 , c_1 .

Перебирая возможные наборы характеристик этой группы задач, получаем, что возможны такие типы задач.

- | | | |
|---------------------------------------|--|--|
| 1. $a_1, a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2$; | 6. $a_1 + a_2, b_1 : b_2, c_1, c_2$; | 11. $a_1 + a_2, b_1 - b_2, c_1, c_2$; |
| 2. $a_1, a_2, b_1 + b_2, c_1 - c_2$; | 7. $a_1 - a_2, b_1 : b_2, c_1, c_2$; | 12. $a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1, c_2$; |
| 3. $a_1, a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2$; | 8. $a_1 : a_2, b_1 + b_2, c_1, c_2$; | 13. $a_1 - a_2, b_1 + b_2, c_1, c_2$. |
| 4. $a_1, a_2, b_1 : b_2, c_1 + c_2$; | 9. $a_1 : a_2, b_1 - b_2, c_1, c_2$; | |
| 5. $a_1, a_2, b_1 : b_2, c_1 - c_2$; | 10. $a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1, c_2$; | |

При установлении возможных типов задач учтено, что, например, четвёрка a_1 , a_2 , $b_1 - b_2$, $c_1 + c_2$ по сравнению с четвёркой a_1 , a_2 , $b_1 + b_2$, $c_1 - c_2$ не порождает новый тип задач, так как переменные b и c в пропорциональной зависимости $a = bc$ являются компонентами произведения, а умножение имеет переместительное свойство.

4) Тут рассматриваются задачи, в условиях которых дано только одно значение какой-нибудь переменной пропорциональной зависимости величин и три какие-нибудь характеристики из (2). Все такие задачи сводимы к задачам рассмотренных выше типов. Если, например, дано значение какой-нибудь переменной пропорциональной зависимости $a = bc$, а одна из трёх остальных характеристик также связана с этой переменной, то полученная задача сводима к задаче с двумя значениями одной переменной. Например, если даны характеристики a_1 , $a_1 - a_2$, $b_1 : b_2$ и $c_1 - c_2$, то такая задача сводима к задаче типа a_1 , a_2 , $b_1 : b_2$ и $c_1 : c_2$.

Если же дано значение какой-нибудь переменной пропорциональной зависимости $a = bc$, а три остальные характеристики связаны с другими переменными, то полученная задача сводима к задаче с тремя значениями. Например, если даны характеристики a_1 , $b_1 - b_2$, $b_1 : b_2$ и $c_1 - c_2$, то такая задача сводима к задаче типа a_1 , a_2 , b_1 , b_2 и $c_1 : c_2$.

5) При рассмотрении задач, в условиях которых не содержится значений ни одной из переменных пропорциональной зависимости величин, т.е. когда все четыре характеристики задачи являются характеристиками типа (2), нужно заметить, что тогда две из этих характеристик будут связаны с какой-то одной переменной, и поэтому такая задача сводима к задаче с двумя значениями одной переменной.

Например, задача с характеристиками $a_1 + a_2$, $b_1 - b_2$, $b_1 : b_2$ и $c_1 - c_2$ сводима к задаче с характеристиками $a_1 + a_2$, b_1 , b_2 , и $c_1 - c_2$.

Анотація. Текстові задачі з однією величиною і пропорційною залежністю величин. У статті обґрунтовується логічне поділ задач з однією величиною і пропорційною залежністю величин, що враховує відмінності в методах розв'язання.

Ключові слова: текстова задача, логічне поділ, методи розв'язання.

Summary. Text tasks with a single value and proportional dependent variables. The article explains the logical division of tasks taking into account the differences in the methods of solving.

Keywords: text task, logical division, methods of solving.

Аннотация. Текстовые задачи с одной величиной и пропорциональной зависимостью величин. В статье обосновывается логическое деление задач с одной величиной и пропорциональной зависимостью величин, учитывающее различия в методах решения.

Ключевые слова: текстовая задача, логическое деление, методы решения.