Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, А. В. Куцев

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

в 5 КЛАССЕ

Пособие для учителей
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

МИНСК
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ОБРАЗОВАНИЯ
2016

УДК 373.5.016:51
ББК 74.262.21
Л27

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра естественнонаучных дисциплин и информатики государственного учреждения образования «Минский областной институт развития образования» (доцент кафедры *В. В. Казаков*);
методист высшей категории отдела методического обеспечения естественно-математического образования Научно-методического учреждения «Национальный институт образования» Министерства образования Республики Беларусь *Л. Е. Зезетко*

Латотин, Л. А.

Л27 Текстовые задачи по математике в 5 классе : пособие для учителей учреждений общ. сред. образования / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский, А. В. Куцев. — Минск : Нац. ин-т образования, 2016. — 152 с.

ISBN 978-985-559-708-8.

В пособии для учителей описаны классификации задач с одной величиной и задач с пропорциональной зависимостью величин и то, как эти две системы задач реализованы в учебном пособии по математике для V класса Л. А. Латотина и Б. Д. Чеботаревского. Рассмотрены методы решения задач всех возможных типов в каждой из указанных классификаций. Рассматриваются нестандартные задачи, представленные в учебных пособиях по математике для V класса.

Адресуется учителям математики учреждений общего среднего образования, ученым-методистам, родителям.

УДК 373.5.016:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-985-559-708-8

ВВЕДЕНИЕ

I. Понятие текстовой задачи

Важнейшая задача обучения в учреждении общего среднего образования — помочь учащимся стать компетентными, продуктивными членами современного общества. Период жизни, который приходится примерно на II и III ступени общего среднего образования, когда детство уже позади, но профессиональное использование математики еще невозможно, является критическим для успеха или неуспеха в строгом абстрактном мышлении. По нашему убеждению, хорошее преподавание текстовых задач играет определяющую роль в этот период.

Само понятие текстовой задачи в работах по методике арифметики трактуется по-разному. Укажем некоторые из определений.

В. Г. Чичигин в пособии для учительских институтов «Методика преподавания арифметики» указывает, что «задачей в широком смысле этого слова называется требование определить числовое значение искомой величины, зная, во-первых, числовые значения других величин, входящих в задачу, и, во-вторых, зависимости, которые связывают все эти величины между собой» [1, с. 274].

Е. С. Березанская в пособии для учителей «Методика арифметики» отмечает, что «задачей в арифметике называется требование определить численное значение какой-либо совокупности объектов или величин, зная численные значения других совокупностей или величин, находящихся в определенной зависимости между собой и с искомым» [2, с. 394].

Преподаватель Московского учительского института и Николаевского сиротского института Ф. Е. Егоров в своей книге «Методика арифметики» считает задачи видом практических упражнений и отмечает, что они составляют самый важный и развивающий элемент. Задачей он называет всякий вопрос, для решения которого по двум или нескольким числам требуется найти новое число. Известные числа в задаче называются данными, а число, которое нужно найти, — искомым. В задаче поясняется значение всех данных чисел, и такие пояснения называются условиями задачи. Если условия состоят в прямом указании действий, которые надо произвести над данными числами для получения искомого, то такую задачу он называет примером на вычисление, а под словом «задачи» понимает только такие вопросы, где условия прямо не указывают действий, которые надо произвести над данными числами для определения искомого, и где, следовательно, действия тем или иным путем должны быть найдены решающим, разумеется, на основании условий вопроса (см. [3], с. 25).

А. Тоом в статье «Между детством и математикой: текстовые задачи в математическом образовании» дает близкое к этому толкование текстовой задачи. Он указывает, что «нетекстовая задача — это задача, сформулированная, используя только математические символы и технические выражения типа “Решите уравнение...”. Соответственно, текстовая задача — это задача, использующая нематематические слова для передачи математического смысла. Поскольку на школьном уровне нет места для сложных формализмов профессиональной математики, нетекстовые задачи, имеющие дело с формализмами, сводятся к упражнениям необходимым, но скучноватым. Неудивительно, что интересные задачи, доступные на этом уровне, — это по большей части текстовые задачи» [4].

Мы будем понимать задачу в последнем из приведенных толкований. Исходя из этого определения, например, задание «Найдите число, которое вместе с числом 7 составляет число 11» является текстовой задачей, поскольку для решения этого задания требуется выполнить моделирование ситуации, описанной на естественном языке, а именно определить, что словосочетание «вместе с» выражает действия сложения, а слово «составляет» — отношение равенства. Однако, если это задание сформулировать как «Найдите число, сумма которого и числа 7 равна числу 11», то его следует считать примером на вычисление одного из слагаемых по сумме и другому слагаемому.

II. Значение текстовой задачи в обучении

Важнейшим аспектом жизнедеятельности ребенка является игра, в основе которой лежит творческое воображение. С другой стороны, все аспекты современной цивилизации включают воображение. Когда мы читаем книгу, смотрим кино или художественную картину, мы представляем себе определенные события, сознавая при этом, что они нереальны. Современная математика как объект цивилизации не является исключением: воображение необходимо не только для того, чтобы развивать математику, но и для того, чтобы ее понимать. Учреждение общего среднего образования не должно прерывать то общее, что есть у детства и культуры, а именно творческую игру воображения. Когда учитель географии говорит своим учащимся: «Сегодня мы будем путешествовать по Припятскому национальному парку», — дети понимают, что эти слова не следует толковать буквально: это будет *воображаемое* путешествие. Аналогичное взаимопонимание имеет место, когда учитель белорусской литературы говорит: «Сегодня урок мы проведем в компании Сотникова», — или учитель биологии говорит: «Давайте заглянем внутрь живой клетки». Функция учреждения общего среднего образования — расширять мир детей, вводить в этот мир факты, образы, идеи, законы, явления, выходящие за рамки их личного опыта и повседневного быта.

В учреждении общего среднего образования, как и в обычной жизни, учащиеся должны иметь воображение и применять его. Математика не исключение из этого правила. Когда учитель говорит: «У Насти было десять конфет, из которых три она отдала брату», — дети понимают, что это абстрактные Настя, брат и конфеты. Это понимание необходимо детям, чтобы изучать математику, науку об абстракциях.

III. Структура текстовой задачи

Любая текстовая задача описывает определенную предметную область посредством указания числовых значений некоторых свойств объектов этой области, отношений между этими объектами. В текстовой задаче также содержится некоторое требование.

Предметная область — это область реального или идеального мира, описанная в задаче. Предметная область состоит из объектов, различаемых по свойствам и находящихся в определенных отношениях между собой или взаимодействующих каким-либо образом. С точки зрения решения задачи предметная область может содержать как существенные, так и несущественные данные. Решающему задачу необходимо уметь выделить существенную их часть. В процессе изучения предметной области должна быть создана ее *математическая модель*. Отношения между объектами должны быть формализованы при помощи средств, доступных решающему.

Предметная область вместе с отношениями, связывающими объекты этой области, образует *условие задачи*.

Требование задачи может означать дать количественную характеристику одного или нескольких объектов предметной области, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между объектами или определить вид этого отношения.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере следующей задачи.

Задача 1. Финляндия граничит с Норвегией, Швецией и Россией, и ее сухопутная граница составляет 2563 км. Найдите границы Финляндии с каждой из этих стран, учитывая, что граница с Норвегией на 164 км больше границы со Швецией и на 600 км меньше границы с Россией.

Предметную область задачи составляют четыре объекта — государства Финляндия, Норвегия, Швеция и Россия. При этом рассматриваемым отношением является двухместное отношение Гр (x, y) — граница между x и y. Таким образом, условие задачи представляет собой совокупность предложений «Финляндия граничит с Норвегией, Швецией и Россией, и ее сухопутная граница составляет 2563 км» и «Граница с Норвегией на 164 км больше границы со Швецией и на 600 км меньше границы с Россией». Требование задачи выражено предложением «Найдите границы Финляндии с каждой из этих стран».

Условие задачи составляют определенные утверждения — элементарные условия, а именно:

- Финляндия граничит с Норвегией, Швецией и Россией;
- границы с Норвегией, Швецией и Россией вместе составляют 2563 км;
- граница с Норвегией на 164 км больше границы со Швецией;
- граница с Норвегией на 600 км меньше границы с Россией.

Требование задачи распадается на три элементарных требования:

- найдите границы Финляндии с Норвегией;
- найдите границы Финляндии со Швецией;
- найдите границы Финляндии с Россией.

Как видим, в задаче может быть несколько элементарных условий. Они представляют собой количественные или качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними. Требований в задаче также может быть несколько. Они могут быть сформулированы как в вопросительной, так и в утвердительной форме.

Условия и требования взаимосвязаны. Система взаимосвязанных условий и требований образует так называемую *высказывательную модель задачи*.

Таким образом, чтобы понять, какова структура задачи, надо выявить ее условия и требования, отбросив все лишнее, второстепенное, не влияющее на ее структуру, т. е. построить высказывательную модель задачи.

Чтобы получить эту модель, надо текст задачи развернуть (сделать это можно письменно или устно), поскольку он, как правило, дается в сокращенном, свернутом виде. Для этого можно переформулировать задачу, построить ее графическую модель, ввести какие-либо обозначения и т. д.

Кроме того, вычленение условий задачи можно производить с разной глубиной. Глубина анализа условий и требований задачи зависит главным образом от того, знакомы ли учащиеся с видом задач, к которому принадлежит заданная, и знают ли они способ решения таких задач.

По высказывательной модели можно построить математическую модель, в качестве которой, в зависимости от этапа обучения, может быть или система отрезков (V—VI классы), или уравнение (система уравнений) (VII—XI классы). Для задачи **1** такой моделью может быть система отрезков, приведенная на рисунке 1.

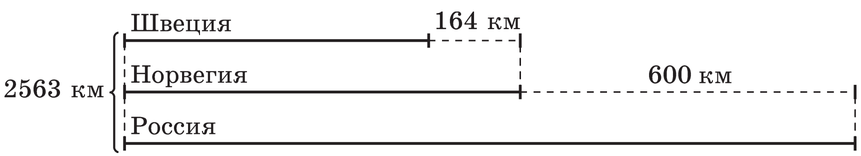


Рис. 1

Уточним теперь смысл термина «решение задачи». В методической литературе этим термином обозначают два разных понятия. С одной стороны, под решением задачи понимают результат, т. е. ответ на требование задачи, с другой — решением задачи называют процесс нахождения этого результата, причем этот процесс рассматривают двояко: и как способ нахождения результата, например, говорят о решении задачи арифметическим способом, и как последовательность тех действий, которые выполняет решающий, применяя тот или иной способ, т. е. в этом случае под решением задачи понимается вся деятельность решающего задачу.

IV. Приведенные и неприведенные задачи

На I ступени общего среднего образования учащиеся большей частью решали так называемые приведенные задачи либо задачи, которые переформулировкой условия могут быть сделаны приведенными. Поясним понятие приведенной задачи.

В тексте задачи зависящие друг от друга данные могут быть сближены или разобщены, вопрос в задаче может быть поставлен в конце текста, в его середине или в начале.

Учащиеся более успешно решают приведенные задачи, т. е. задачи, в которых данные условия расположены в порядке требуемых действий (см. [2], с. 409—410).

Многие задачи в учебном пособии [5] являются приведенными. Представим примеры таких задач.

Задача 2. Велосипедист ехал 2 ч со скоростью 14 км/ч, после чего ему осталось проехать еще 25 км. Какое расстояние нужно было проехать велосипедисту? (см. [5, ч. 1], № 25, с. 15).

Задача 3. Акула в длину может достигать 20 м, кит может быть на 13 м длиннее, крокодил — на 25 м короче кита, а анаконда — на 2 м длиннее крокодила. Какие длины имеют названные животные? Запишите их по убыванию длин (см. [5, ч. 1], № 58, с. 26).

Задача 4. Суммарная площадь двух земельных участков прямоугольной формы равна 1407 м^2. Измерения одного участка равны 28 м и 24 м. Найдите ширину второго участка, учитывая, что его длина равна 35 м (см. [5, ч. 1], № 397, с. 147).

Сначала для упражнения следует выбирать задачи, в которых вопрос четко отделен от данных задачи и поставлен в конце текста, потом предложить для решения задачи, в которых вопрос стоит в начале или в середине текста и связан с данными при помощи придаточных предложений («если известно...», «причем...» и т. д.).

Если учащиеся не имеют достаточного навыка в решении неприведенных задач и в этом заключаются затруднения при решении задач, то учителю следует восполнить этот пробел, а именно: видоизменять формулировку условия некоторых задач, делать их приведенными, а затем решать те же задачи по условию, данному в неприведенном виде. Примером задачи, решение которой может потребовать такой переформулировки, является следующая:

Задача 5. Бобр, Плиса, Сха, Гайна, Поня — притоки Березины. Длины Бобра и Схи составляют соответственно $1\frac{15}{16}$ и $1\frac{1}{4}$ длины Плисы, длина Гайны — $1\frac{1}{4}$ длины Схи, а длина Пони — $\frac{9}{20}$ длины Гайны. Найдите длины этих притоков, учитывая, что длина Плисы равна 64 км. Постройте соответствующую линейную диаграмму (см. [5, ч. 2], № 941, с. 161).

Переформулированная задача может быть такой:

Задача 5.1. Бобр, Плиса, Сха, Гайна, Поня — притоки Березины. Длина Плисы равна 64 км. Длины Бобра составляет $1\frac{15}{16}$ длины Плисы, длина Схи — $1\frac{1}{4}$ длины Плисы, длина Гайны — $1\frac{1}{4}$ длины Схи, а длина Пони — $\frac{9}{20}$ длины Гайны. Найдите длины этих притоков.

В этом пособии не рассматриваются такие задачи, которые переформулировкой могут стать приведенными. Рассматриваемые здесь задачи требуют специального математического моделирования.

Раздел 1

ЗАДАЧИ С ОДНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

Сравним между собой следующие две задачи.

Задача 6. Периметр треугольника равен 154 мм. Одна из его сторон на 29 мм меньше другой, а вместе с третьей составляет 93 мм. Определите стороны треугольника. Какой это треугольник? (см. [5, ч. 1], № 332, с. 124).

Задача 7. С двух полей площадью 43 га и 69 га вместе собрали 3255 ц тритикале. Найдите урожай, собранный с каждого поля, учитывая, что их урожайности относятся как 2 : 1 (см. [5, ч. 2], № 1009, с. 182).

При решении задачи **6** используется только та информация, которую содержат элементарные условия, указанные в формулировке, причем сюжет задачи построен с использованием только одной величины — периметра треугольника. Решение задачи **7** требует использования не только той информации, которая содержится в элементарных условиях, содержащихся в формулировке задачи, но и привлечения дополнительной информации о том, как связаны между собой величины, с использованием которых построен сюжет задачи, — *урожай*, *урожайность* и *площадь*.

Указанное различие задач **6** и **7** существенно влияет на способы их решения. Более простыми для решения являются задачи, сюжеты которых построены с использованием одной величины. С этих задач мы и начнем наше изложение.

1.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАЧИ С ОДНОЙ ВЕЛИЧИНОЙ

Простейшими задачами с одной величиной являются задачи с двумя объектами. Примерами таких задач являются задачи **8**, **9** и **10**.

Задача 8. Беседь протекает по России и Беларуси, и ее длина равна 261 км. Найдите длину Беседи по территории нашей страны, учитывая, что она на 109 км больше длины по территории России (см. [5, ч. 1], № 54, с. 25).

Задача 9. Площади озер Плюсы и Ильжа в Браславском районе относятся как 22 : 3, и вместе они составляют 175 га. Найдите отдельные площади озер (см. [5, ч. 1], № 141, с. 56).

Задача 10. Скорость полета шмеля меньше скорости полета осы в 3 раза, или на 100 м/мин. Найдите эти скорости (см. [5, ч. 1], № 239, с. 92).

В задаче **8** использована величина *длина*, в задаче **9** — *площадь*, в задаче **10** — величина *скорость*. При этом в условии задачи **8** даны сумма двух значений величины длины и результат разностного сравнения этих значений, в условии задачи **9** — сумма двух значений величины площади и результат кратного сравнения этих значений, в условии задачи **10** — результаты разностного и кратного сравнения двух значений величины скорости.

Как видно из формулировок этих задач, в условиях могут использоваться как значения величин, так и сумма этих значений, а также результат разностного или кратного сравнения значений одной величины. Иными словами, в условиях текстовых задач используются значения той или иной величины, а также сумма, разность и частное двух значений одной величины. Произведение значений одной величины не используется в условиях текстовых задач, так как такое произведение есть либо значение новой величины, либо неосмысленно. Например, произведение 2 м · 3 м двух значений длины, равное 6 м^2, есть значение площади, а произведение 2 конфеты · 3 конфеты двух значений количества неосмысленно.

Пусть X — величина, с использованием которой формулируется задача, а x_1 и x_2 — два ее значения. Тогда в условии задачи могут быть использованы как сами значения x_1 и x_2, так и их сумма $x_1 + x_2$, разность $x_1 - x_2$, частное $x_1 : x_2$. Назовем

$$x_1,\ x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ x_1 : x_2$$

характеристиками задачи.

1.2. ЗАДАЧИ С ДВУМЯ ОБЪЕКТАМИ

Для задания задачи с двумя объектами требуется использование двух характеристик из пяти возможных. Пары этих характеристик порождают разные виды задач с одной величиной и двумя объектами. Опишем такие задачи.

1.2.1. Задачи типа (x_1, x_2)

Пусть в условии задачи даны значения x_1 и x_2 некоторой величины X. Требованием такой задачи может быть нахождение общего значения $x_1 + x_2$ либо нахождение результата $x_1 - x_2$ разностного или $x_1 : x_2$ кратного сравнения значений x_1 и x_2.

Задачи этого типа являются типичными для I ступени общего среднего образования. Посредством решения таких задач учащиеся осваивают средства выражения арифметических действий сложения, вычитания и деления в естественном языке, учатся распознавать действия сложения, вычитания и деления в словосочетаниях на естественном языке.

Задачи типа (x_1, x_2) встречаются и в V классе, как, например, следующая задача.

Задача 11. Озеро Солонец в Ушачском районе собирает воду с 1850 га, а соседнее озеро Рясно — с 570 га. Какова суммарная площадь водосбора озер Солонец и Рясно? (см. [5, ч. 1], № 86, с. 36).

1.2.2. Задачи типа (x_1 (x_2), $x_1 + x_2$)

Пусть в условии задачи даны одно из значений x_1 или x_2 некоторой величины X и сумма $x_1 + x_2$ этих значений. Требованием такой задачи может быть нахождение другого значения x_2 или x_1 либо нахождение результата $x_1 - x_2$ разностного или $x_1 : x_2$ кратного сравнений значений x_1 и x_2.

Задачи этого типа также типичны для I ступени общего среднего образования. Они встречаются и в V классе, как, например, следующая задача.

Задача 12. Найдите и постройте смежные углы, один из которых равен 27° (см. [5, ч. 1]; № 224, *а*; с. 89).

1.2.3. Задачи типа (x_1 (x_2), $x_1 - x_2$)

Пусть в условии задачи даны одно из значений x_1 или x_2 некоторой величины X и разность $x_1 - x_2$ этих значений. Требованием такой задачи может быть нахождение другого значения x_2 или x_1 либо нахождение суммы $x_1 + x_2$ или результата $x_1 : x_2$ кратного сравнения значений x_1 и x_2.

Задачи этого типа также типичны для I ступени общего среднего образования. Они встречаются и в V классе как подзадачи более сложной задачи. Примером может служить следующая задача.

Задача 13. Длина прямоугольника $\frac{9}{16}$ м, а ширина на $\frac{2}{16}$ м больше. Найдите периметр прямоугольника (см. [5, ч. 2], № 703, с. 84).

1.2.4. Задачи типа (x_1 (x_2), $x_1 : x_2$)

Пусть в условии задачи даны одно из значений x_1 или x_2 некоторой величины X и частное $x_1 : x_2$ этих значений. Требованием такой задачи может быть нахождение другого значения x_2 или x_1 либо нахождение суммы $x_1 + x_2$ или результата разностного $x_1 : x_2$ сравнения значений x_1 и x_2.

Задачи этого типа типичны для I ступени общего среднего образования. Они встречаются и в V классе как подзадачи более сложной задачи. Примером может служить следующая задача.

Задача 14. Длина стола составляет $\frac{4}{5}$ м, а ширина — $\frac{5}{8}$ его длины. Какова площадь стола? (см. [5, ч. 2], № 942, с. 161).

1.2.5. Задачи типа ($x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$)

Пусть в условии задачи даны сумма $x_1 + x_2$ и разность $x_1 - x_2$ значений x_1 или x_2 некоторой величины X. Требованием такой задачи может быть нахождение каждого значения x_2 или x_1 либо результата кратного $x_1 : x_2$ сравнения значений x_1 и x_2.

Задачи этого типа являются объектом освоения учащимися V класса. Способ их решения рассматривается в учебном пособии (см. [5, ч. 1], № 54, с. 25). Обсудим его на примере такой задачи.

Задача 15. Расстояние по шоссе от Волковыска до Барановичей через Слоним составляет 110 км, причем от Слонима до Волковыска на 2 км больше, чем до Барановичей. Найдите расстояния от Слонима до Волковыска и до Барановичей (см. [5, ч. 1], № 55, с. 25—26).

Элементарные условия «Расстояние по шоссе от Волковыска до Барановичей через Слоним составляет 110 км» и «Расстояние до Волковыска на 2 км больше, чем до Барановичей» можно смоделировать схемой, приведенной на рисунке 2.

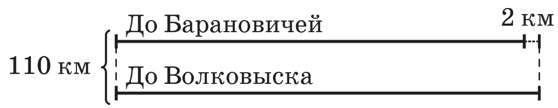


Рис. 2

Идея способа решения такой задачи состоит в уравнивании расстояний до Волковыска и до Барановичей до одного из этих значений, которое ведет к удвоенному значению того расстояния, до которого уравнивали.

Уравняем, например, оба расстояния до большего расстояния. Для этого преобразуем условия. Если расстояние до Барановичей увеличить на 2 км, то в результате получится удвоенное расстояние до Волковыска, равное 110 км + 2 км, т. е. равное 112 км. Но тогда действительное расстояние до Волковыска равно 112 км : 2, т. е. 56 км, а расстояние до Барановичей равно 56 км – 2 км, т. е. 54 км.

Следует иметь в виду, что приведенное рассуждение проводится устно, а записи учащегося в рабочей тетради должны быть по возможности краткими.

1. 110 км + 2 км = 112 км — удвоенное расстояние до Волковыска.

2. 112 км : 2 = 56 км — реальное расстояние до Волковыска.

3. 56 км – 2 км = 54 км — расстояние до Барановичей.

Ответ. 56 км, 54 км.

Понятно, что в тетради должна быть приведена и модель-схема (см. рис. 2).

В учебном пособии [5] задачами этого типа являются задачи под номерами 54; 55; 153, *а*; 156, *а*; 358; 477; 488; 649; 813.

1.2.6. Задачи типа $(x_1 + x_2,\ x_1 : x_2)$

Пусть в условии задачи даны сумма $x_1 + x_2$ и частное $x_1 : x_2$ значений x_1 или x_2 некоторой величины X. Требованием такой задачи может быть нахождение каждого значения x_2 или x_1 либо результата разностного $x_1 - x_2$ сравнения значений x_1 и x_2.

Решение задач этого типа учащиеся осваивают в V классе. Способ их решения рассматривается в учебном пособии (см. [5, ч. 1], № 75, с. 33—34). Обсудим его на примере следующей задачи.

Задача 16. Озера Урода и Черная Урода из Ушачской группы озер вместе занимают 200 га, причем площадь второго озера в 3 раза меньше. Найдите площадь каждого озера (см. [5, ч. 1]; № 111, *а*; с. 43).

Элементарные условия «Урода и Черная Урода вместе занимают 200 га» и «Площадь Черной Уроды в 3 раза меньше» можно смоделировать схемой, приведенной на рисунке 3.

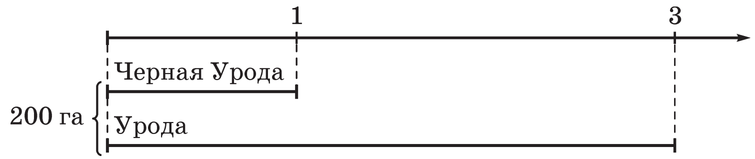


Рис. 3

Идея способа решения такой задачи состоит в учитывании того, что, с одной стороны, известна суммарная площадь обоих озер в гектарах, а с другой — эту суммарную площадь можно выразить и в долях. Эта идея может быть реализована в таком рассуждении.

По условию площади озер Урода и Черная Урода вместе занимают 200 га. Но эта же площадь в долях равна 1 + 3, т. е. 4. Поэтому величина доли равна 200 га : 4, т. е. 50 га. Это означает, что площадь Черной Уроды равна 50 га, тогда площадь Уроды составляет 50 га · 3, т. е. 150 га.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими.

Приводится примерно такая схема, как на рисунке 3.

1. 200 га — общая площадь Уроды и Черной Уроды.

2. 1 + 3 = 4 — общая площадь Уроды и Черной Уроды в долях.

3. 200 га : 4 = 50 га — такова величина доли; такова площадь Черной Уроды.

4. 50 га · 3 = 150 га — такова площадь Уроды.

Ответ. 150 га, 50 га.

В учебном пособии [5] задачами этого типа являются задачи под номерами 75; 76; 111, *б*; 141; 153, *б*, *в*, *г*; 156, *б*; 226; 231, *б*; 241; 254; 403; 571; 819; 872.

В формулировках некоторых из этих задач могут присутствовать дополнительные условия, после учета которых задача становится стандартной.

Задача 17. Периметр прямоугольника равен 112 м. Найдите его стороны, учитывая, что одна из них больше другой в 3 раза (см. [5, ч. 2], № 571, с. 41).

По условию дан периметр прямоугольника и отношение 1 : 3 его разных сторон. Учитывая, что сумма этих сторон есть полупериметр прямоугольника, получаем стандартную задачу рассматриваемого типа.

1.2.7. Задачи типа $(x_1 - x_2,\ x_1 : x_2)$

Пусть в условии задачи даны разность $x_1 - x_2$ и частное $x_1 : x_2$ значений x_1 или x_2 некоторой величины X. Требованием такой задачи может быть нахождение каждого значения x_2 или x_1 либо суммы этих значений.

Решение задач этого типа учащиеся осваивают в V классе. Способ их решения рассматривается в учебном пособии (см. [5, ч. 1], № 75, с. 33—34). Обсудим его на примере такой задачи.

Задача 18. Река Каспля протекает по территории России и Беларуси. Ее протяженность по Беларуси на 116 км меньше и относится к протяженности по России как 5 : 34. Найдите протяженность Каспли по России и Беларуси (см. [5, ч. 1], № 325, с. 123).

Элементарные условия «Протяженность Каспли по Беларуси на 116 км меньше ее протяженности по России» и «Протяженность Каспли по Беларуси относится к ее протяженности по России как 5 : 34» можно смоделировать схемой, приведенной на рисунке 4.

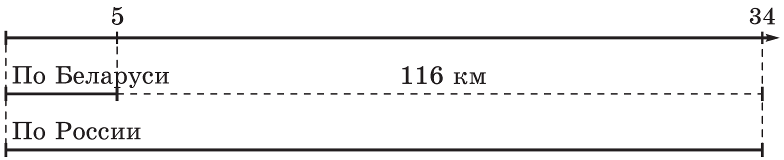


Рис. 4

Идея способа решения такой задачи состоит в учитывании того, что, с одной стороны, известна разность протяженностей Каспли по Беларуси и России в километрах, а с другой — эту разность можно выразить и в долях. Эта идея может быть реализована следующим рассуждением.

По условию протяженность Каспли по Беларуси на 116 км меньше ее протяженности по России, и эта же разность в долях равна 34 – 5, т. е. 29. Поэтому величина доли равна 116 км : 29, т. е. 4 км. Тогда протяженность Каспли по Беларуси равна 4 км · 5, т. е. 20 км, а протяженность Каспли по России — 4 км · 34, т. е. 136 км.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими.

Приводится примерно такая схема, как на рисунке 4.

1. Протяженность Каспли по Беларуси меньше ее протяженности по России на 116 км.

2. 34 – 5 = 29 — на столько долей протяженность Каспли по Беларуси меньше.

3. 116 км : 29 = 4 км — такова величина доли.

4. 4 км · 5 = 20 км — такова протяженность Каспли по Беларуси.

5. 4 км · 34 = 136 км — такова протяженность Каспли по России.

Ответ. 136 км, 20 км.

В учебном пособии [5] задачами этого типа являются задачи под номерами 110; 140; 153, *д*, *е*, *ж*; 154; 155; 156, *в*; 239; 325; 489; 522; 523.

Формулировки некоторых задач этого типа могут быть усложнены дополнительными условиями, как, например, в следующей задаче.

Задача 19. Река Маства протекает по территории Украины и Беларуси. Ее протяженность по Беларуси на 12 км меньше протяженности по Украине и относится к протяженности всей реки как 20 : 43. Найдите длину Маствы (см. [5, ч. 1], № 140, с. 56).

Элементарные условия «Протяженность Маствы по Беларуси на 12 км меньше ее протяженности по Украине» и «Протяженность Маствы по Беларуси относится ко всей протяженности реки как 20 : 43» можно смоделировать схемой, приведенной на рисунке 5.

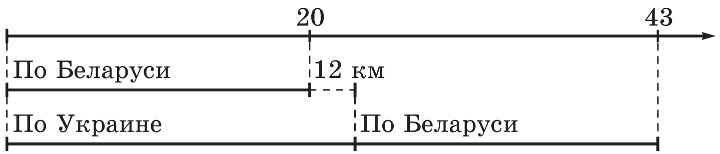


Рис. 5

Чтобы свести данную задачу к стандартной, надо учесть, что в первом элементарном условии сравниваются величины «Протяженность Маствы по Беларуси» и «Протяженность Маствы по Украине», а во втором — величины «Протяженность Маствы по Беларуси» и «Протяженность всей Маствы». Но условия задачи «Протяженность всей Маствы равна 43 долям» и «Протяженность Маствы по Беларуси равна 20 долям» позволяют найти протяженность Маствы по Украине, она равна 43 – 20, т. е. 23, долям.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими.

Приводится примерно такая схема, как на рисунке 5.

1. 43 – 20 = 23 — такова протяженность Маствы по Украине в долях.

2. 23 – 20 = 3 — на столько долей меньше протяженность Маствы по Беларуси.

3. 12 км — на столько километров меньше протяженность Маствы по Беларуси.

4. 12 км : 3 = 4 км — такова величина доли.

5. 4 км · 43 = 172 км — такова длина Маствы.

Ответ. 172 км.

Задача 20. Пять окуней весят столько же, как и 2 леща, и лещ тяжелее окуня на 360 г. Сколько весит окунь? (см. [5, ч. 1], № 259, с. 98).

Условия задачи представим схемой, приведенной на рисунке 6. Теперь замечаем, что если принять массу пол-окуня в качестве доли, то тогда масса окуня выразится двумя долями, а масса леща — пятью долями. Значит, разность масс леща и окуня, по условию равная 360 г, выражается 5 – 2, т. е. 3, долями. Тогда величина доли равна 360 г : 3, т. е. 120 г. Поэтому масса окуня составляет 120 г · 2, т. е. 240 г, а масса леща — 120 г · 5, т. е. 600 г.

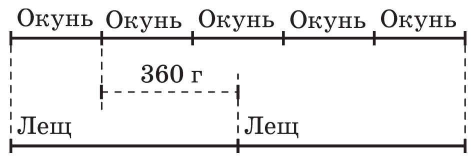


Рис. 6

В тетради учащийся может сделать следующие записи. Приводится рисунок, подобный рисунку 6, а далее следуют следующие утверждения:

1. Масса пол-окуня — 1 доля.
2. 2 доли — масса окуня.
3. 5 долей — масса леща.
4. 360 г — такова разность масс леща и окуня.
5. 5 – 2 = 3 — столько долей составляют 360 г.
6. 360 г : 3 = 120 г — такова величина доли.
7. 120 г · 2 = 240 г — такова масса окуня.
8. 120 г · 5 = 600 г — такова масса леща.

Ответ. 240 г, 600 г.

1.3. ЗАДАЧИ С ТРЕМЯ И БОЛЕЕ ОБЪЕКТАМИ

Многие задачи с тремя и более объектами для своего решения требуют использования способов решения, описанных в предыдущем параграфе.

Задача 21. Один угол треугольника втрое больше, чем второй, и на 30° больше третьего угла. Определите углы треугольника. Какой это треугольник? (см. [5, ч. 1], № 334, с. 124).

Условия задачи можно представить схемой, приведенной на рисунке 7. Обратим внимание на то, что если увеличить сумму углов треугольника, равную 180°, на 30°, то полученная сумма в 210° будет соответствовать 1 + 3 + 3, т. е. 7, долям. Значит, величина доли равна 210° : 7, т. е. 30°. Это означает, что величина второго угла равна 30°. Тогда величина первого угла составляет 30° · 3, т. е. 90°, а величина второго — 30° + 30°, т. е. 60°.

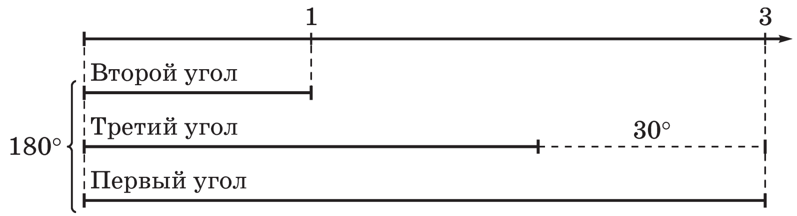


Рис. 7

Записи учащегося в тетради могут быть следующими.
Приводится примерно такая схема, как на рисунке 7.

1. 180° + 30° = 210° — такова увеличенная на 30° сумма углов треугольника.
2. 1 + 3 + 3 = 7 — столько долей составляют 210°.
3. 210° : 7 = 30° — такова величина доли; такова величина второго угла.
4. 30° · 3 = 90° — такова величина первого угла.
5. 30° + 30° = 60° — такова величина третьего угла.

Ответ. 90°, 30°, 60°.

Задача 22. Тиса, Сава, Прут — наиболее длинные притоки Дуная. Длина Дуная такова, что она на 1910 км больше длины Савы, ее четыреста семьдесят пятая доля равна сто шестьдесят первой доле длины Тисы, а двести восемьдесят пятая доля — девяносто четвертой доле длины Савы. Найдите длины Дуная, Тисы, Савы и Прута, учитывая, что Прут на 1 км длиннее Тисы (см. [6], № 477, с. 109).

Условия задачи можно представить схемой, приведенной на рисунке 8.

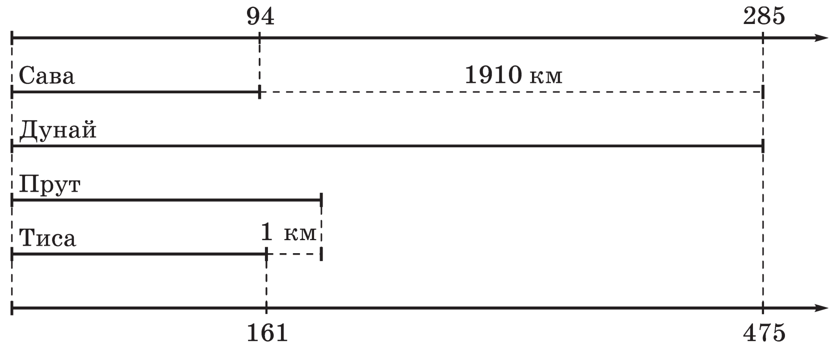


Рис. 8

Обратим внимание на то, что разность длин Дуная и Савы, равная 1910 км, в то же время выражается 285 – 94, т. е. 191, долей. Поэтому величина доли равна 1910 км : 191, т. е. 10 км. Значит, длина Дуная равна 10 км · 285, т. е. 2850 км, а длина Савы — 10 км · 94, т. е. 940 км.

Теперь учтем, что длина Дуная выражается 475 другими долями, которых в длине Тисы содержится 161. Величина 475-й доли длины Дуная равна 2850 км : 475, т. е. 6 км, поэтому длина Тисы равна 6 км · 161, т. е. 966 км. Тогда длина Прута составляет 966 км + 1 км, т. е. 967 км.

Записи учащегося в тетради могут быть оформлены следующим образом. Дается рисунок, подобный рисунку 8, и затем следуют такие утверждения:

1. 1910 км — на столько длина Дуная больше длины Савы.
2. 285 – 94 = 191 — столько долей составляют 1910 км.
3. 1910 км : 191 = 10 км — такова величина 285-й доли длины Дуная.
4. 10 км · 285 = 2850 км — такова длина Дуная.
5. 10 км · 94 = 940 км — такова длина Савы.
6. 2850 км : 475 = 6 км — такова величина 475-й доли длины Дуная.

7. 6 км · 161 = 966 км — такова длина Тисы.
8. 966 км + 1 км = 967 км — такова длина Прута.
Ответ. 966 км, 940 км, 967 км, 2850 км.

В заключение раздела приведем таблицу распределения задач с одной величиной и двумя объектами.

§	Тип ($x_1 + x_2$, $x_1 - x_2$)	Тип ($x_1 + x_2$, $x_1 : x_2$)	Тип ($x_1 - x_2$, $x_1 : x_2$)
2	54; 55; 153, *а*; 156, *а*; 358; 477; 488; 649; 813; 153, *а*		
3		75; 76; 111, *а*, *б*; 141; 153, *б*, *в*, *г*; 156, *б*; 226; 231, *б*; 241; 254; 403; 571; 819; 872	
4			110; 140; 153, *д*, *е*, *ж*; 154; 155; 156, *в*; 239; 325; 489; 522; 523

1.4. ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ ОБЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ВСЕХ ЭЛЕМЕНТОВ ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВ

Задача 23. Встретились два отца, два сына и дедушка с внуком, а всего три человека. Как могло такое быть?

Это возможно, если один из этих людей является и отцом, и сыном.

Задача 24. На отрезке *AB* длиной 12 см выбраны такие точки *C* и *D*, что *AD* = 10 см, а *BC* = 7 см. Найдите длину отрезка *CD*.

Первое решение. Пусть имеется отрезок *AB* длиной 12 см, а точка *D* этого отрезка отстоит от точки *A* на 10 см. Тогда *BD* = 12 см – 10 см = 2 см.

По условию точка *C* отрезка *AB* отстоит от конца *B* на 7 см (рис. 9). Тогда *CD* = *BC* – *BD* = 7 см – 2 см = 5 см.

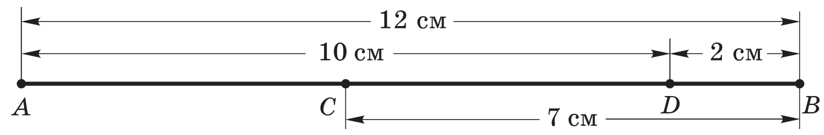


Рис. 9

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. 12 см – 10 см = 2 см — такова длина отрезка *BD*.
2. 7 см – 2 см = 5 см — такова длина отрезка *CD*.

Ответ. *CD* = 5 см.

Второе решение *(комбинаторное).* Отрезки *AD* и *BC* длинами 10 см и 7 см соответственно являются частями отрезка *AB* длиной 12 см. Сумма длин отрезков *AD* и *BC* равна 10 см + 7 см, т. е. 17 см, и это больше длины самого отрезка *AB*. Причина этого превышения в том, что отрезки *AD* и *BC* частично перекрываются по отрезку *CD* (см. рис. 9) и в найденной сумме это перекрытие *CD* учтено дважды. Значит, длина отрезка *CD* равна 17 см – 12 см, т. е. 5 см.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. 10 см + 7 см = 17 см — такова сумма длин отрезков *AD* и *BC*.
2. 17 см – 12 см = 5 см — такова длина отрезка *CD*.

Ответ. *CD* = 5 см.

Задача 25. На доске записано 8 трехзначных чисел, 6 круглых десятков. Найдите, сколько чисел записано, учитывая, что среди этих чисел имеется 3 трехзначных круглых десятка.

Задача 26. За контрольные работы по математике получили отличные отметки 10 учеников и по языку — 9 учеников, а всего 15 учеников получили отличные отметки. Определите, сколько учеников выполнили обе контрольные работы на отлично.

Задача 27. Площадь прямоугольника *ABCD* равна 18 см^2, а прямоугольника *MNOP* — 15 см^2 (рис. 10). Найдите площадь прямоугольника *ANOD*, учитывая, что площадь прямоугольника *MBCP* составляет 6 см^2.

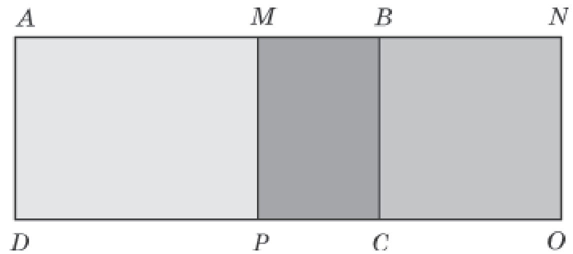


Рис. 10

Задача 28. На отрезке *AB* длиной 12 см выбраны такие точки *C* и *D*, что *AD* = 10 см, а *CD* = 5 см. Найдите длину отрезка *BC*.

Задача 29. На рисунке 11 площадь прямоугольника *ABGH* равна 27 м^2, площадь прямоугольника *ABCD* — 18 м^2. Найдите площадь прямоугольника *EFGH*, учитывая, что прямоугольник *CDEF* имеет площадь, равную 12 м^2.

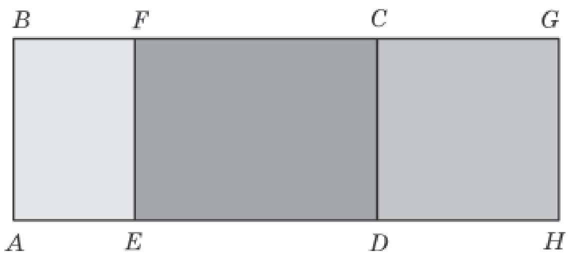


Рис. 11

Задача 30. На отрезке *AB* выбраны такие точки *C*, *D*, *F*, что *AD* = 30 мм, *CF* = 40 мм (рис. 12). Найдите длину отрезка *AB*, учитывая, что *CD* = 20 мм и *BF* = 30 мм.

Рис. 12

Задача 31. Найдите площадь квадрата на рисунке 13, учитывая приведенные на нем сведения.

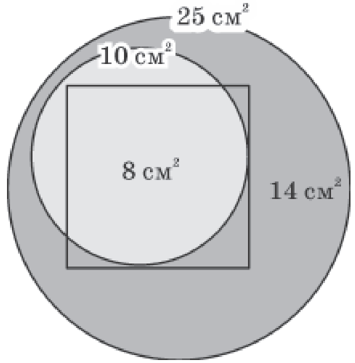


Рис. 13

Задача 32. В классе 28 учащихся. Из них 17 интересуются математикой, 4 — только шахматами. Найдите, сколько учащихся этого класса не интересуются ни математикой, ни шахматами.

Задача 33. В туристической группе из 25 человек 15 человек владеют немецким языком, 17 — английским, а 3 — не владеют ни одним из этих языков. Найдите, сколько человек этой туристической группы владеют обоими языками.

Первое решение. Пусть в туристической группе из 25 человек не владеют ни немецким, ни английским языками 3 человека (рис. 14). Тогда хотя бы одним языком владеют 25 – 3, т. е. 22, человека. Из этих 22 человек, по условию, владеют немецким языком 15 человек, поэтому не владеют немецким языком 22 – 15, т. е. 7, человек. Эти 7 человек владеют только английским языком.

Поскольку всего владеющих английским языком имеется 17 человек, то владеющих обоими языками — 17 – 7, т. е. 10, человек.

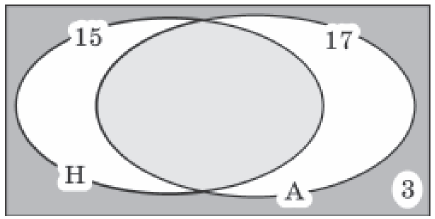


Рис. 14

Учащийся в тетради может ограничиться следующими записями:

1. $25 - 3 = 22$ — столько человек владеют хотя бы одним языком.

2. $22 - 15 = 7$ — столько человек владеют только английским языком.

3. $17 - 7 = 10$ — столько человек владеют двумя языками.

Ответ. 10 человек.

Второе решение (*комбинаторное*). Из 25 человек группы владеют немецким или английским $25 - 3$, т. е. 22, человека. В сумме $15 + 17$ дважды учтены те, кто владеет и немецким, и английским. Поэтому двумя языками владеют $(15 + 17) - 22$, т. е. 10 человек.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. $25 - 3 = 22$ — столько человек владеют хотя бы одним языком.

2. $15 + 17 = 32$ — такова сумма количеств человек, владеющих немецким или английским языком.

3. $32 - 22 = 10$ — столько человек владеют двумя языками.

Ответ. 10 человек.

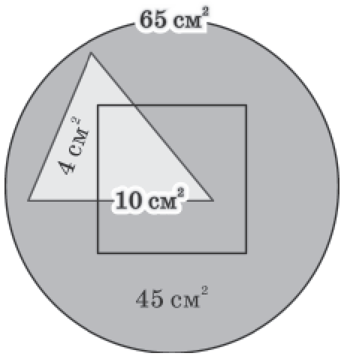


Рис. 15

Задача 34. На треугольник наложен квадрат так, что площадь незакрытой части треугольника равна 4 см^2 (рис. 15). Найдите площадь квадрата, учитывая, что эти фигуры расположены в круге с площадью 65 см^2, а не занятая ими часть круга имеет площадь, равную 45 см^2.

Задача 35. Из всех учащихся класса отличные отметки за контрольную работу по математике получили 6 учащихся, за работу по языку — 7 учащихся, а у 17 учащихся отличных отметок не было. Найдите, сколько учащихся в классе, учитывая, что 7 имели только по одной отличной отметке.

Если за контрольную работу отличные отметки по математике получили 6 учащихся, за работу по языку — 7 (рис. 16), то всего отличных отметок было выставлено $6 + 7$, т. е. 13. Из них 7 отметок — таким учащимся, у которых эта отличная отметка единственная. Остальные $13 - 7$, т. е. 6, отличных отметок распределены между учащимися по две. Учащихся, получивших по две отличные отметки, было $6 : 2$, т. е. 3.

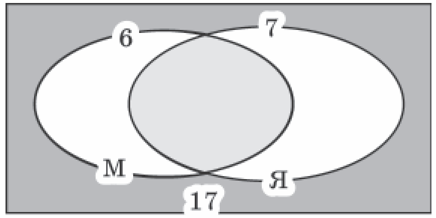


Рис. 16

Общее число учащихся в классе найдем, сложив количество учащихся, не имеющих отличных отметок, с количеством учащихся, получивших по одной отличной отметке, и количеством учащихся, получивших по две отличные отметки, получим, что всего учащихся в классе $17 + 7 + 3$, т. е. 27.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. $6 + 7 = 13$ — столько всего отличных отметок было выставлено.

2. $13 - 7 = 6$ — столько отличных отметок получили те учащиеся, у которых отличных отметок оказалось по две.

3. $6 : 2 = 3$ — столько учащихся получили отличные отметки и по математике, и по языку.

4. $17 + 7 + 3 = 27$ — столько всего учащихся в классе.

Ответ. 27 учащихся.

Задача 36. В пятых классах всего 86 учащихся. Из них 38 учащихся занимаются в спортивных секциях, 42 — в художественных кружках, а 31 — не занимается ни художеством, ни спортом. Найдите, сколько учащихся пятых классов занимаются и спортом, и художеством.

По условию из 86 учащихся пятых классов в спортивных секциях занимаются 38 учащихся, в художественных кружках — 42 учащихся, а 31 учащийся не занимается ни художеством, ни спортом (рис. 17). Тогда художеством или спортом занимаются 86 – 31, т. е. 55, учащихся, а только художеством — 55 – 38, т. е. 17, учащихся. Значит, и спортом, и художеством занимаются 42 – 17, т. е. 25, учащихся.

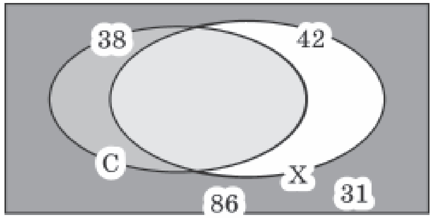


Рис. 17

Записи учащихся в тетради могут быть следующими:

1. 86 – 31 = 55 — столько учащихся занимаются художеством или спортом.

2. 55 – 38 = 17 — столько учащихся занимаются только художеством.

3. 42 – 17 = 25 — столько учащихся занимаются и спортом, и художеством.

Ответ. 25 учащихся.

Задача 37. Все мячи в школе вместе весят 12 кг, большие мячи весят 5 кг, одноцветные — 5 кг, а малые многоцветные — 5 кг. Найдите массу больших одноцветных мячей.

Задача 38. Всего имеется 40 тетрадей, из которых 20 — в клетку, 18 имеют рисунок на обложке. Найдите, сколько тетрадей в клетку имеет рисунок на обложке, учитывая, что других тетрадей без рисунка на обложке всего 7.

Задача 39. Вершина прямого угла треугольника с площадью 375 мм^2 находится в центре круга. Эти фигуры помещены внутри прямоугольника с измерениями 50 мм и 40 мм (рис. 18). Площадь части прямоугольника, не занятой треугольником и кругом, равна 1391 мм^2. Найдите площадь круга.

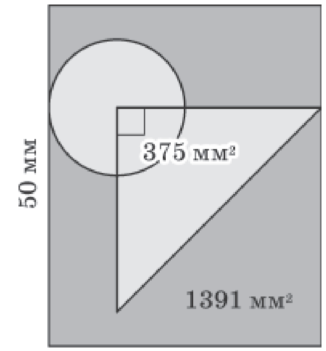


Рис. 18

Задача 40. На отрезке AB длиной 50 мм отмечены такие точки C и D, что отрезок AC больше отрезка CD на 15 мм и больше отрезка BD на 10 мм (рис. 19). Найдите длины отрезков AC и CD.

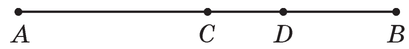


Рис. 19

Задача 41. Квадрат со стороной 30 мм наложен на прямоугольник, площадь которого на 600 мм^2 больше площади квадрата (рис. 20). Найдите площадь их общей части, учитывая, что без нее эти фигуры вместе закрывают 1200 мм^2.

Задача 42. Внутри круга площадью 64 см^2 находятся еще два круга, площади которых относятся как 3 : 2, площадь общей части кругов равна 6 см^2 (рис. 21). Найдите площади внутренних кругов, учитывая, что не занятая ими часть большого круга занимает площадь, равную 40 см^2.

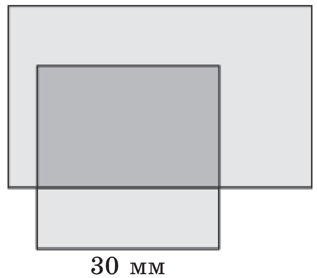


Рис. 20

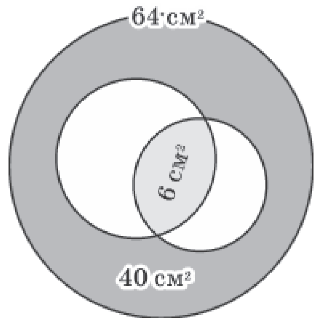


Рис. 21

Задача 43. В классе 32 учащихся. Тех учащихся, у которых имеется велосипед, на 4 больше количества учащихся, имеющих роликовые коньки. Учитывая, что 7 учащихся не имеют ни велосипеда, ни коньков, а 3 учащихся имеют и то, и другое, найдите, сколько учащихся имеют велосипеды.

По условию в классе 32 учащихся, из которых 7 учащихся не имеют ни велосипеда, ни коньков, а 3 учащихся имеют и то, и другое (рис. 22). Тогда учащихся, у которых имеются велосипед или коньки, есть 32 − 7, т. е. 25, а учащихся, которые имеют только велосипед или коньки, — 25 − 3, т. е. 22. Поскольку учащихся, у которых имеется велосипед, на 4 больше количества учащихся, имеющих коньки, то увеличив 22 на 4, получим удвоенное количество учащихся, которые имеют только велосипеды, это количество равно 22 + 4, т. е. 26. Тогда количество учащихся, имеющих только велосипеды, равно 26 : 2, т. е. 13, а всего с велосипедами — 13 + 3, т. е. 16, учащихся.

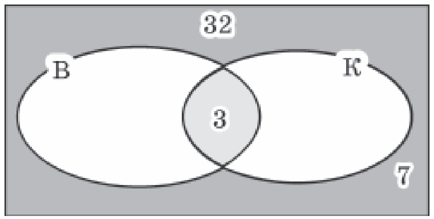


Рис. 22

Учащийся в тетради может ограничиться следующими записями:

1. 32 − 7 = 25 — столько учащихся имеют велосипед или коньки.
2. 25 − 3 = 22 — столько учащихся имеют только велосипед или коньки.
3. 22 + 4 = 26 — таково удвоенное количество учащихся, имеющих велосипед.
4. 26 : 2 = 13 — столько учащихся имеют только велосипед.
5. 13 + 3 = 16 — столько учащихся имеют велосипед.

Ответ. 16 учащихся.

Задача 44. Имеются круг, треугольник и квадрат, площади которых соответственно равны 1100 см^2, 1000 см^2, 900 см^2 (рис. 23). Площадь общей части квадрата и круга равна 370 см^2, квадрата и треугольника — 250 см^2, круга и треугольника — 450 см^2, а квадрата, круга и треугольника — 200 см^2. Найдите, какую площадь закрывают все три фигуры.

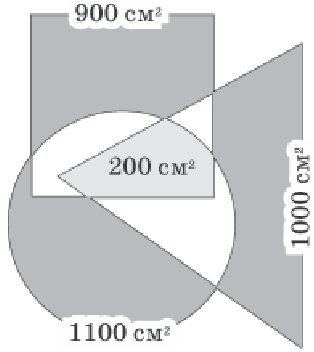


Рис. 23

Первое решение. По условию площадь общей части квадрата и круга равна 370 см^2, а квадрата, круга и треугольника — 200 см^2. Поэтому площадь, закрываемая только квадратом и кругом, равна 370 см^2 − 200 см^2, т. е. 170 см^2. Аналогично найдем, что площадь, закрываемая только квадратом и треугольником, равна 250 см^2 − 200 см^2, т. е. 50 см^2, а площадь, закрываемая только кругом и треугольником, 450 см^2 − 200 см^2, т. е. 250 см^2.

Теперь найдем, что площадь, закрытая только кругом, равна 1100 см^2 − (250 см^2 + 200 см^2 + 170 см^2), т. е. 480 см^2, площадь, закрытая только квадратом, — 900 см^2 − (200 см^2 + + 50 см^2 + 170 см^2), т. е. 480 см^2, а площадь, закрытая только треугольником, — 1000 см^2 − (200 см^2 + 250 см^2 + 50 см^2), т. е. 500 см^2.

Зная площадь каждой части, находим, что вся закрытая фигурами площадь равна 1100 см^2 + (480 см^2 + 50 см^2) + + 500 см^2, т. е. 2130 см^2.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. 370 см^2 − 200 см^2 = 170 см^2 — такая площадь закрыта только квадратом и кругом.

2. $250\ см^2 - 200\ см^2 = 50\ см^2$ — такая площадь закрыта только квадратом и треугольником.

3. $450\ см^2 - 200\ см^2 = 250\ см^2$ — такая площадь закрыта только кругом и треугольником.

4. $1100\ см^2 - (250\ см^2 + 200\ см^2 + 170\ см^2) = 480\ см^2$ — такая площадь закрыта только кругом.

5. $900\ см^2 - (200\ см^2 + 50\ см^2 + 170\ см^2) = 480\ см^2$ — такая площадь закрыта только квадратом.

6. $1000\ см^2 - (200\ см^2 + 250\ см^2 + 50\ см^2) = 500\ см^2$ — такая площадь закрыта только треугольником.

7. $1100\ см^2 + (480\ см^2 + 50\ см^2) + 500\ см^2 = 2130\ см^2$ — такую площадь закрывают все три фигуры.

Ответ. $2130\ см^2$.

Второе решение *(комбинаторное)*. Учтем, что в сумму $1100\ см^2 + 1000\ см^2 + 900\ см^2$, равную $3000\ см^2$, по одному разу входит площадь, закрываемая только одной из фигур, и по два раза площади, закрываемые одновременно квадратом и кругом, квадратом и треугольником, кругом и треугольником. В разности $3000\ см^2 - (370\ см^2 + 250\ см^2 + 450\ см^2)$, равной $1930\ см^2$, по одному разу учтены площади, закрываемые только кругом, только треугольником и только квадратом, а также только квадратом и кругом, только квадратом и треугольником, только кругом и треугольником, однако не учтена ни разу площадь общей части всех трех фигур. Поэтому для получения всей закрытой фигурами площади нужно полученную величину в $1930\ см^2$ увеличить на площадь общей части всех трех фигур. Получим, что искомая площадь равна $1930\ см^2 + 200\ см^2$, т. е. $2130\ см^2$.

Учащийся в тетради выполняет следующие записи:

1. $1100\ см^2 + 1000\ см^2 + 900\ см^2 = 3000\ см^2$ — такова сумма площадей круга, треугольника и квадрата.

2. $3000\ см^2 - (370\ см^2 + 250\ см^2 + 450\ см^2) = 1930\ см^2$ — такова площадь, закрытая всеми тремя фигурами, но без площади их общей части.

3. $1930\ см^2 + 200\ см^2 = 2130\ см^2$ — такова площадь, закрытая всеми тремя фигурами.

Ответ. $2130\ см^2$.

Задача 45. Из Гродно на экскурсию в Германию выехали 36 учащихся. Из них понимают польский язык 25 учащихся. 17 учащихся изучают немецкий язык, причем из них 9 понимают по-польски. Мальчиков в поездке было 20, из них по-польски понимают 13 учащихся, немецкий изучают 9 учащихся, а четверо из них понимают и по-польски. Найдите, сколько девочек не понимают ни по-польски, ни по-немецки.

Задача 46. Имеется три круга с площадями $400\ м^2$, $900\ м^2$ и $625\ м^2$. Площади общих частей первого и второго, первого и третьего, второго и третьего в сумме дают $725\ м^2$. Найдите, какую площадь закрывают эти круги вместе, учитывая, что общая часть всех трех кругов имеет площадь $100\ м^2$.

Задача 47. Из участников дискуссии по проблемам приграничных связей понимают по-белорусски 25 ученых, по-литовски — 15 ученых, по-польски — 17 ученых. Из них понимают все три языка 7 человек. Хотя бы два языка понимают 20 человек. Найдите количество участников дискуссии.

Задача 48. Имеется три круга, из которых левый имеет площадь, равную $16\ м^2$, правый и нижний — площади, равные $14\ м^2$ каждый (рис. 24). Площадь общей части левого и правого кругов равна $6\ м^2$, левого и нижнего — $5\ м^2$, правого и нижнего — $5\ м^2$. Найдите площадь общей части всех трех кругов, учитывая, что вместе они закрывают $30\ м^2$.

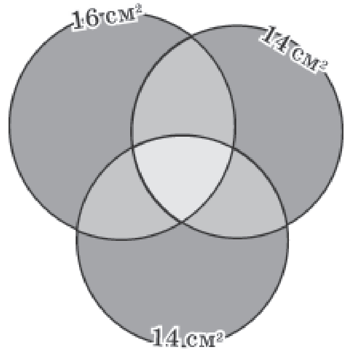


Рис. 24

Задача 49. В классе 28 учащихся, из которых 16 — девочки. 18 учащихся посещают бассейн, а у 10 учащихся дома живет собака. Десять девочек посещают бассейн, трое имеют собаку. Из тех учащихся, которые посещают бассейн, у четырех дома живет собака. Найдите, сколько девочек класса, посещающих бассейн, имеют собаку, учитывая, что каждый мальчик, у которого нет собаки, посещает бассейн.

Условие задачи, в которой некоторое множество объектов описывается посредством указания свойств этих объектов, удобно изображать с помощью диаграмм Венна.

Диаграмма Венна представляет собой графическое изображение множества и его свойств. Множество изображается кругом или другой свя́зной фигурой на плоскости и мыслится как множество точек этой фигуры. При этом множество всех объектов обычно изображается прямоугольником, а его части — фигурами внутри этого прямоугольника. Например, условия «В классе 28 учащихся, из которых 16 — девочки. 18 учащихся посещают бассейн, а у 10 учащихся дома живет собака» можно показать такой диаграммой (рис. 25). На этом рисунке множество всех учащихся класса показано прямоугольником, а в разрыве границы этого прямоугольника указано, что это множество содержит 28 учащихся. Буква Д в разрыве границы овала слева указывает, что этим овалом изображено множество девочек класса, а число 16 в разрыве границы показывает, что девочек в классе 16. Аналогично буква Б в разрыве границы овала справа указывает на то, что этим овалом изображено множество учащихся, посещающих бассейн, а число 18 указывает на то, что бассейн посещают 18 учащихся. Наконец, буква С в разрыве границы овала снизу указывает на то, что этим овалом изображено множество учащихся, имеющих собаку, а число 10 показывает, что собаку имеют 10 учащихся.

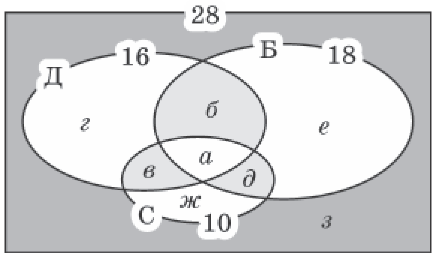


Рис. 25

Овалы Д, Б, С разделили множество всех учащихся класса на восемь областей:

а — множество девочек, посещающих бассейн и имеющих собаку;

б — множество девочек, посещающих бассейн и не имеющих собаки;

в — множество девочек, не посещающих бассейн и имеющих собаку;

г — множество девочек, не посещающих бассейн и не имеющих собаки;

д — множество мальчиков, посещающих бассейн и имеющих собаку;

е — множество мальчиков, посещающих бассейн и не имеющих собаки;

ж — множество мальчиков, не посещающих бассейн и имеющих собаку;

з — множество мальчиков, не посещающих бассейн и не имеющих собаки.

Дополним рисунок.

Поскольку по условию каждый мальчик, у которого нет собаки, посещает бассейн, то область *з* пуста, в ней никого нет, т. е. 28 учащихся расположены в областях *а* — *ж*. Сумма 16 + 18 + 10 количеств учащихся в овалах Д, Б, С дает число 44, что больше количества учащихся, которое равно 28. Это объяснимо, поскольку некоторые учащиеся здесь считаются дважды. Так учтены дважды девочки, посещающие бассейн, — их 10, дважды считались девочки, имеющие собаку, — их 3, и дважды — те учащиеся, которые посещают бассейн и имеют собаку, — их 4. Таких учащихся 10 + 3 + 4, т. е. 17. Если теперь из 44 вычесть 17, то полученная разность 27 снова отличается от общего количества 28. И это отличие объяснимо: те девочки, которые посещают бассейн и имеют собаку, были трижды учтены в сумме $16 + 18 + 10$ и также трижды учтены в сумме $10 + 3 + 4$, а потому не учтены ни разу в разности $(16 + 18 + 10) - (10 + 3 + 4)$. Отличие результатов 27 и 28 на единицу говорит о том, что в области a находится одна девочка.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. Поскольку каждый мальчик, у которого нет собаки, посещает бассейн, то область вне трех овалов пуста.
2. $16 + 18 + 10 = 44$ — такова сумма количеств девочек, учащихся, посещающих бассейн, и учащихся, имеющих собаку.
3. $10 + 3 + 4 = 17$ — такова сумма количества девочек, посещающих бассейн, количества девочек, имеющих собаку, и количества учащихся, посещающих бассейн и имеющих собаку.
4. $44 - 17 = 27$ — столько в классе учащихся без тех, которые являются девочками, посещают бассейн и имеют собаку.
5. $28 - 27 = 1$ — сколько в классе девочек, посещающих бассейн и имеющих собаку.

Ответ. 1.

Задача 50. Имеется круг, квадрат и прямоугольник, площади которых соответственно равны 1300 дм^2, 1600 дм^2 и 1500 дм^2, а вместе они закрывают площадь, равную 2940 дм^2 (рис. 26). Площадь, закрытая только кругом и квадратом, равна 340 дм^2, только кругом и прямоугольником — 170 дм^2, только квадратом и прямоугольником — 110 дм^2. Найдите площадь общей части всех трех фигур.

Задача 51. В классе 29 учащихся, из которых 14 имеют братьев или сестер, а у 16 учащихся мамы работают в государственных учреждениях. У четверых мальчиков есть брат или сестра, у пяти мальчиков мамы работают в государственных учреждениях и у двоих из них есть брат или сестра. Из тех учащихся, которые имеют

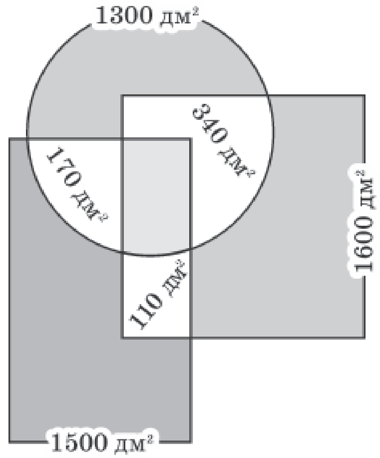


Рис. 26

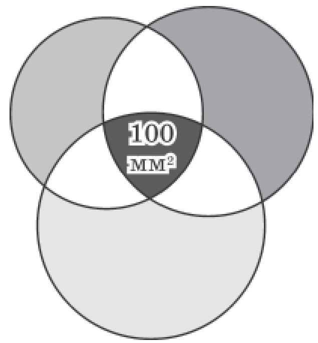


Рис. 27

брата или сестру, у троих мамы работают в государственных учреждениях. Найдите, сколько в этом классе девочек, учитывая, что если мама девочки не работает в государственном учреждении, то у нее есть брат или сестра.

Задача 52. Есть три круга, которые вместе закрывают площадь, равную 1200 мм^2, а их общая часть имеет площадь 100 мм^2 (рис. 27). Площадь, закрытая только один раз, равна 700 мм^2, при этом площадь, закрытая только первым кругом, на 50 мм^2 больше площади, закрытой только вторым кругом, и на 150 мм^2 больше площади, закрытой только третьим кругом. Площадь, закрытая одновременно первым и вторым кругами, на 100 мм^2 больше площади, закрытой одновременно первым и третьим кругами, и на 50 мм^2 меньше площади, закрытой одновременно вторым и третьим кругами. Найдите площадь наибольшего и наименьшего кругов.

Задача 53. В школе 70 вазонов с цветами, из которых больших белых круглых вазонов — 12 и 5 небольших небелых некруглых. Больших небелых некруглых вазонов вместе с белыми некруглыми небольшими вазонами и круглыми небольшими небелыми вазонами — 35. Больших небелых некруглых вазонов меньше на 6 количества белых некруглых небольших вазонов и меньше на 17 количества круглых небольших небелых вазонов. Круглых белых вазонов больше на 3 количества белых больших вазонов и на 1 больше количества круглых больших вазонов. Найдите, сколько имеется всех больших, всех белых, всех круглых вазонов.

Задача 54. Внутри прямоугольника с измерениями 6 м и 8 м помещены круг и квадрат, площади которых относятся как 2 : 3 (рис. 28). Найдите площади круга и квадрата, учитывая, что их общая часть имеет площадь, равную 4 м^2, а незанятая ими часть прямоугольника — 22 м^2.

Задача 55. В домашней библиотеке 600 книг, из которых половина относится к художественной литературе или имеет мягкую обложку. Найдите количество книг с мягкой обложкой, учитывая, что оно на 50 книг меньше количества книг с художественными произведениями, а художественных книг с мягкой обложкой всего 50.

Задача 56. Внутри прямоугольника с измерениями 10 см и 14 см находятся два круга (рис. 29). Площадь их общей части меньше на 26 см^2 площади остальной части первого круга, на 4 см^2 — остальной части второго круга и на 62 см^2 — части прямоугольника, не занятой кругами. Найдите площадь каждого круга.

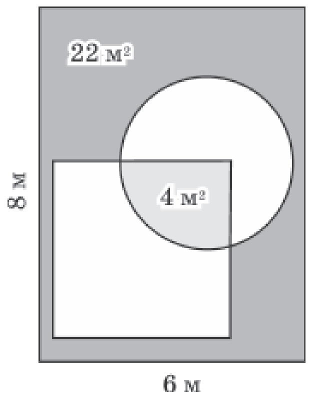


Рис. 28

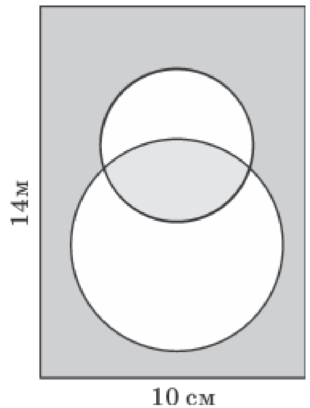


Рис. 29

Задача 57. Из пятнадцати выписанных чисел три числа делятся на 10. Количество нечетных чисел, кратных пяти, втрое меньше количества четных чисел, некратных пяти, и вдвое меньше количества нечетных чисел, некратных пяти. Найдите количество выписанных четных чисел.

Вначале учтем, что условие «Число делится на 10» означает «Число четное и делится на 5». Поэтому в условии задачи множество выписанных чисел характеризуется по двум простым условиям «Число четное» и «Число делится на 5». Учитывая это, условия задачи можно изобразить такой диаграммой Венна (рис. 30, *а*).

Области, содержащие числа, нечетные и кратные пяти, числа, четные и некратные пяти, и числа, нечетные и некратные пяти, обозначим соответственно A, B, C. Тогда, учитывая, что из выписанных чисел 15 – 3, т. е. 12, чисел не делятся на 10, условия «Количество нечетных чисел, кратных пяти, втрое меньше количества четных чисел, некратных пяти, и вдвое меньше количества нечетных чисел, некратных пяти» можно изобразить такой схемой (рис. 30, *б*).

На этой схеме числа, которые делятся на 5 и не делятся на 2, составляют одну долю, числа, которые делятся на 2 и не делятся на 5, составляют три доли, числа, которые не делятся на 2 и не делятся на 5, составляют две доли. Поскольку все некратные 10 числа составляют 1 + 3 + 2, т. е. 6, долей, то на одну долю приходится 12 : 6, т. е. 2, числа,

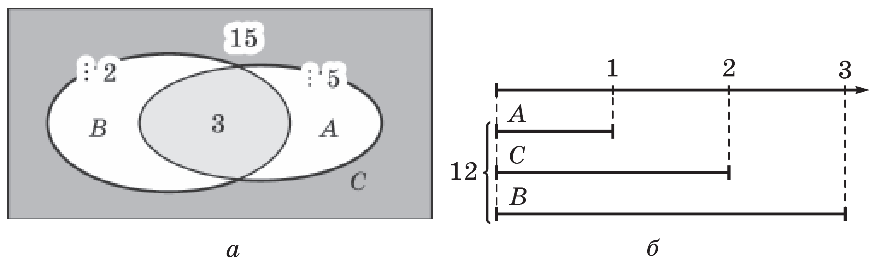


Рис. 30

то четных некратных 5 чисел выписано $2 \cdot 3$, т. е. 6, а всего четных чисел выписано $6 + 3$, т. е. 9.

Учащийся в тетради может ограничиться следующими записями:

1. $15 - 3 = 12$ — столько чисел не делится на 10, т. е. не делится на 2 или не делится на 5.
2. $1 + 3 + 2 = 6$ — столько долей составляют эти числа.
3. $12 : 6 = 2$ — такова величина доли.
4. $2 \cdot 3 = 6$ — столько чисел четных и некратных пяти.
5. $6 + 3 = 9$ — столько выписано четных чисел.

Ответ. 9.

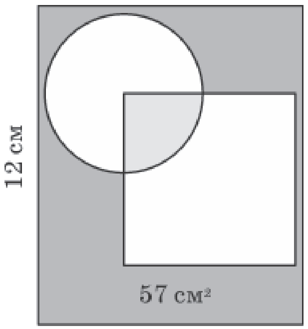


Рис. 31

Задача 58. Вершина квадрата является центром круга. Эти фигуры расположены внутри прямоугольника с измерениями 10 см и 12 см и не закрывают 57 см^2 его площади (рис. 31). Найдите площадь квадрата, учитывая, что в круге находится шестая доля квадрата.

Задача 59. Одно число из десяти записанных нечетное и непростое. Найдите, сколько выписано простых чисел, учитывая, что четных чисел — 3 доли, а простых чисел — 2 доли.

Задача 60. Вершина прямоугольника является центром квадрата, а его площадь на 8 м^2 больше площади квадрата. Эти фигуры находятся внутри прямоугольника с измерениями 14 м и 20 м и не закрывают 160 м^2 его площади. Найдите сторону квадрата.

Задача 61. Вершина O квадрата $OMAN$ является центром круга, площадь которого на 1 см^2 меньше площади этого квадрата (рис. 32). Круг не закрывает 37 см^2 площади квадрата. Точки M и N являются серединами сторон AB и AD квадрата $ABCD$. Найдите площадь треугольника ABC, учитывая, что площадь его части внутри круга на 50 см^2 меньше площади остальной части.

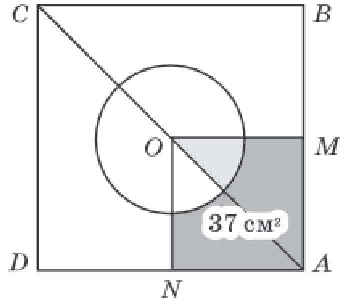


Рис. 32

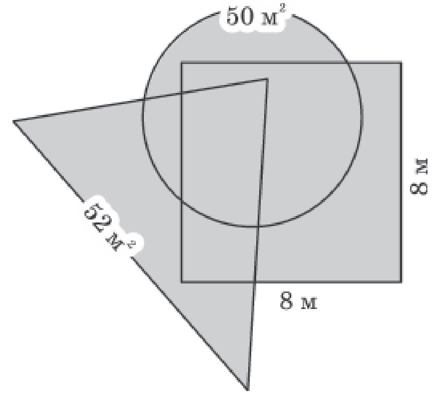


Рис. 33

Задача 62. 60 студентов работают над восстановлением Быховского замка. Из них 35 изучают итальянский язык, 42 — французский и 29 — испанский язык. Найдите, сколько студентов изучают все три языка, учитывая, что 34 студента изучают хотя бы два языка и нет студентов, которые не изучают ни одного из этих языков.

Задача 63. Есть круг площадью 50 м^2, квадрат со стороной 8 м и треугольник площадью 52 м^2, а всего они закрывают 108 м^2 (рис. 33). Найдите площадь общей части всех трех фигур, учитывая, что площадь, занятая хотя бы двумя фигурами, равна 44 м^2.

Задача 64. Квадрат, треугольник и круг площадью 56 дм^2, 50 дм^2 и 45 дм^2 соответственно расположены внутри прямоугольника так, что их общая часть имеет площадь 7 дм^2, а незанятая часть — площадь 163 дм^2 (рис. 34). Площадь общей части круга и квадрата равна 15 дм^2, квадрата и треугольника — 14 дм^2, круга и треугольника — 12 дм^2. Найдите площадь прямоугольника.

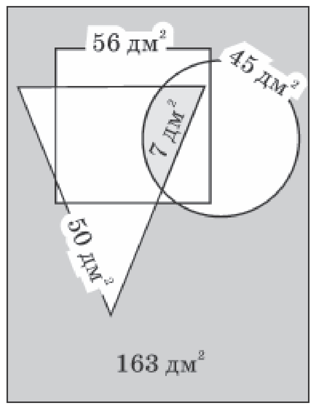


Рис. 34

Задача 65. Записано 17 четных чисел, 16 чисел, кратных трем, 15 чисел, кратных семи, и 9 чисел, взаимно простых с числом 42. Из них 4 числа делятся на 6, 5 чисел делятся на 14, 6 чисел делятся на 21 и 2 числа делятся на 42. Определите, сколько записано чисел.

Задача 66. Записано 42 числа, из которых 17 четных чисел, 19 чисел, кратных трем, 16 чисел, кратных 5, 7 чисел, взаимно простых с числом 30. Из чисел, некратных числу 30, 4 числа делятся на 6, 2 числа — на 10 и 5 чисел — на 15. Найдите, сколько записано чисел, кратных числу 30.

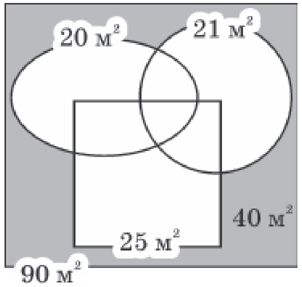


Рис. 35

Задача 67. Овал, круг, квадрат с площадями 20 м^2, 21 м^2, 25 м^2 соответственно расположены в прямоугольнике площадью 90 м^2 (рис. 35). Площадь общей части круга и овала вне квадрата равна 3 м^2, круга и квадрата вне овала — 4 м^2, овала и квадрата вне круга — 5 м^2. Найдите площадь общей части овала, круга, квадрата, учитывая, что не занятая ими часть прямоугольника имеет площадь 40 м^2.

Задача 68. Записано 30 чисел, из которых 4 числа кратны числу 70, 5 чисел взаимно простых с числом 70, чисел, кратных пяти, — 10, кратных семи, — 11, кратных десяти, — 5, кратных четырнадцати, — 6 и кратных тридцати пяти, — 4. Найдите, сколько записано четных чисел.

Задача 69. Овал площадью 15 см^2, круг площадью 18 см^2 и треугольник находятся в прямоугольнике площадью 70 см^2 (рис. 36). Площадь общей части овала и треугольника вне круга равна 3 см^2, овала и круга вне треугольника — 4 см^2, круга и треугольника вне овала — 5 см^2, всех фигур — 2 см^2. Найдите площадь треугольника, учитывая, что часть прямоугольника, не закрытая овалом, кругом и треугольником, имеет площадь, равную 35 см^2.

Задача 70. Из выписанных тридцати чисел 5 чисел взаимно просты с числом 231. Если сложить количество чисел, кратных трем, с количеством чисел, кратных семи, и с количеством чисел, кратных

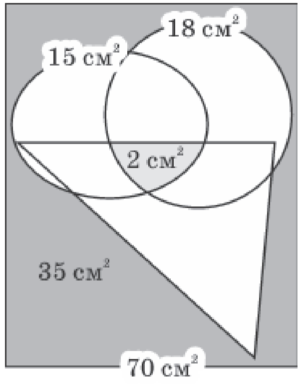


Рис. 36

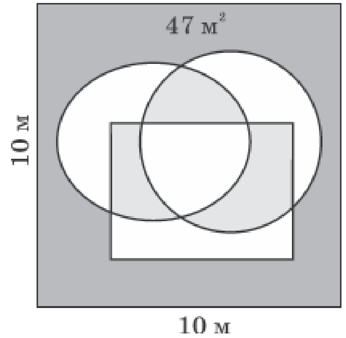


Рис. 37

одиннадцати, то получится 48. А если сложить количество чисел, кратных числу 21, с количеством чисел, кратных числу 33, и с количеством чисел, кратных числу 77, то получится 31. Найдите количество выписанных чисел, кратных числу 231.

Задача 71. Овал, круг и прямоугольник расположены в квадрате со стороной 10 м и не закрывают 47 м^2 его площади (рис. 37). Если сложить площади овала, круга и прямоугольника, то получится 81 м^2. А если сложить площадь общей части овала и круга с площадью общей части круга и прямоугольника и с площадью общей части овала и прямоугольника, то получится 36 м^2. Найдите площадь общей части всех фигур.

Задача 72. Три круга расположены внутри прямоугольника и закрывают половину его площади. Сумма площадей этих кругов на 36 см^2 больше суммы площадей попарных их пересечений. Найдите площадь прямоугольника, учитывая, что площадь общей части всех трех кругов равна 4 см^2.

Задача 73. Четвертая доля выписанных чисел взаимно просты с числом 130, а пять из них кратны числу 130. Чисел, кратных числу 10, вместе с числами, которые кратны числу 26, и числами, которые делятся на 65, на 34 меньше общего количества четных чисел, чисел, кратных 5, и чисел, кратных 13. Найдите количество выписанных чисел.

Задача 74. Из выписанных чисел двадцатую долю составляют числа, кратные числу 1001, а чисел, взаимно простых с числом 1001, в пять раз больше. Количество чисел, кратных семи, вместе с количеством чисел, кратных тринадцати, и количеством чисел, кратных одиннадцати, на 42 больше количества чисел, делящихся на 77, вместе с количеством чисел, делящихся на 91, и количеством чисел, делящихся на 143. Найдите, сколько выписано чисел.

Условие задачи построено с использованием трех независимых свойств натуральных чисел «Делиться на 7» ($\vdots$ 7), «Делиться на 11» ($\vdots$ 11) и «Делиться на 13» ($\vdots$ 13) (рис. 38).

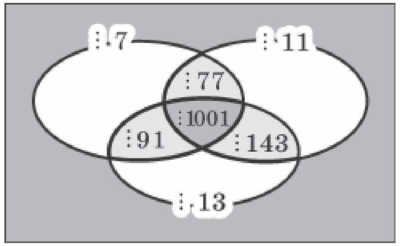


Рис. 38

Множество, заданное словосочетанием «Количество чисел, кратных семи, вместе с количеством чисел, кратных тринадцати, и количеством чисел, кратных одиннадцати», содержит:

- **по одному разу** — числа, кратные только числу 7; числа, кратные только числу 11; числа, кратные только числу 13 (на рисунке 38 области с этими числами закрашены белым цветом);
- **по два раза** — числа, кратные 77; числа, кратные числу 91; числа, кратные числу 143 (на рисунке 38 области с этими числами закрашены светло-серым цветом);
- **по три раза** — числа, кратные числу 1001 (на рисунке 38 области с этими числами закрашены серым цветом).

Множество, заданное словосочетанием «Количество чисел, делящихся на 77 вместе с количеством чисел, делящихся на 91, и количеством чисел, делящихся на 143», содержит:

- **по одному разу** — числа, кратные только числу 17; числа, кратные только числу 91; числа, кратные только числу 143;
- **по три раза** — числа, кратные числу 1001.

Поэтому множество A, заданное разностью этих сумм, содержит **по одному разу**: числа, кратные только числу 7; числа, кратные только числу 11; числа, кратные только числу 13; числа, кратные только числу 17; числа, кратные только числу 91; числа, кратные только числу 143.

Множество A содержит все выписанные числа, кроме чисел, кратных числу 1001, и чисел, взаимно простых с числом 1001. Но по условию задачи количество чисел, кратных числу 1001, составляет $\frac{1}{20}$ всех чисел, а количество чисел, взаимно простых с числом 1001, в пять раз больше, т. е. составляет $\frac{1}{20} \cdot 5$, т. е. $\frac{1}{4}$, всех чисел. Значит, часть чисел, составляющих множество A, равна $1 - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4}\right)$, т. е. $\frac{7}{10}$.

В то же время по условию эта часть содержит 42 числа. Следовательно, одна десятая доля — это 42 : 7, т. е. 6, чисел, а всего выписано $6 \cdot 10$, т. е. 60, чисел.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. $\frac{1}{20}$ — такая часть чисел, кратных числу 1001.
2. $\frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1}{4}$ — такая часть чисел, некратных числу 1001.
3. $1 - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{10}$ — такая часть остальных чисел.
4. 42 — такая часть остальных чисел.
5. $42 : 7 \cdot 10 = 60$ — столько выписано чисел.

Ответ. 60 чисел.

Задача 75. Три круга расположены внутри квадрата. Круги закрывают половину площади квадрата, а их общая часть — восемнадцатую его долю. Сумма площадей кругов на 16 см^2 больше суммы площадей их попарных общих частей. Найдите сторону квадрата.

Задача 76. Три круга расположены внутри квадрата и закрывают половину его площади, а их общая часть — восьмую долю. Сумма площадей всех трех кругов составляет $\frac{3}{4}$ площади квадрата. Сумма площадей попарных общих частей кругов равна 24 см^2. Найдите сторону квадрата.

Задача 77. Числа, кратные числу 110, составляют двенадцатую долю всех выписанных чисел, а числа, взаимно простые с числом 110, — шестую долю. Количество чисел, кратных числу 10, вместе с количеством чисел, кратных числу 22, и количеством чисел, кратных числу 55, составляет $\frac{3}{4}$ количества выписанных чисел. Найдите количество выписанных чисел, учитывая, что количество четных чисел вместе с количеством чисел, кратных пяти, и количеством чисел, кратных одиннадцати, равно 36.

Выписанные числа, не взаимно простые с числом 110, составляют $1 - \frac{1}{6}$, т. е. $\frac{5}{6}$, всех выписанных чисел.

Сумма количества четных чисел с количеством чисел, кратных 5, и количеством чисел, кратных 11, по условию равна 36. Но эта сумма получается, если количество всех выписанных чисел увеличить на количество чисел, кратных числу 10, или кратных числу 22, или кратных числу 55, а затем уменьшить на количество чисел, кратных числу 110. С учетом условий задачи эта сумма составляет $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12}$, т. е. $\frac{3}{2}$, выписанных чисел. Получается, что число 36 в полтора раза больше количества выписанных чисел. Поэтому всего выписано $36 : \frac{3}{2}$, т. е. 24, числа.

Учащийся в тетради может сделать следующие записи:

1. $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ — столько чисел, которые не взаимно просты с числом 110.

2. $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3}{2}$ — во столько раз сумма количества чисел, кратных числу 2, с количеством чисел, кратных 5, и количеством чисел, кратных 11, больше количества выписанных чисел.

3. $36 : \frac{3}{2} = 24$ — столько выписано чисел.

Ответ. 24 числа.

Задача 78. Из выписанных чисел четыре числа делятся на 30, а взаимно простых с числом 30 в четыре раза меньше, чем не взаимно простых с ним. Количество чисел, кратных шести, или кратных десяти, или кратных пятнадцати, составляет $\frac{3}{5}$ количества выписанных чисел. Найдите количество выписанных чисел, учитывая, что количество чисел, кратных тридцати, составляет $\frac{2}{3}$ количества чисел, которые кратны двум и не делятся ни на 3, ни на 5, или кратны трем и не делятся ни на 2, ни на 5, или кратны пяти и не делятся ни на 2, ни на 3.

Задача 79. Из тридцати выписанных чисел шесть чисел делятся на 70, а чисел, взаимно простых с числом 70, вдвое меньше. Количество чисел, которые имеют с числом 70 только один общий простой делитель, в $1\frac{1}{3}$ раза больше количества чисел, которые имеют с числом 70 только два общих простых делителя. Чисел, которые имеют с числом 70 только общий делитель 7, в два раза меньше количества чисел, которые имеют с числом 70 только общий делитель 2, и в три раза меньше количества чисел, которые имеют с числом 70 только общий делитель 5. Чисел, кратных четырнадцати, на одно число больше количества чисел, кратных десяти, и на одно число меньше количества чисел, кратных числу 35. Найдите, сколько из выписанных чисел кратны двум, сколько кратны пяти и сколько кратны семи.

Задача 80. Треугольник, круг и квадрат находятся внутри прямоугольника с измерениями 20 см и 21 см (рис. 39). Их общая часть имеет площадь, равную 14 см^2, а площадь прямоугольника, не закрытая треугольником, кругом и квадратом, в полтора раза больше площади, закрытой ими. Сумма площадей общих частей треугольника и квадрата, треугольника и круга, круга и квадрата составляет $\frac{5}{12}$ площади, занятой этими тремя фигурами. Найдите сумму площадей тех частей прямоугольника, которые закрываются только треугольником, только кругом, только квадратом.

Задача 81. Треугольник, круг и квадрат находятся внутри прямоугольника с площадью 265 см^2 (рис. 40). Их общая часть имеет площадь, равную 12 см^2, а площадь прямоугольника, не закрытая треугольником, кругом и квадратом, в полтора раза больше площади, закрытой ими. Площадь общей части треугольника, круга и квадрата в четыре с половиной раза меньше суммы площадей тех частей прямоугольника, которые закрываются только треугольником, только кругом и только квадратом. Площадь общей части треугольника и круга вне квадрата в четыре раза меньше площади общей части квадрата и круга вне треугольника и на 4 см^2 меньше площади общей части квадрата и треугольника вне круга. Найдите отдельные площади треугольника, круга и квадрата, учитывая, что площадь, закрытая только квадратом, на 3 см^2 меньше площади, закрытой только кругом, и на 3 см^2 больше площади, закрытой только треугольником.

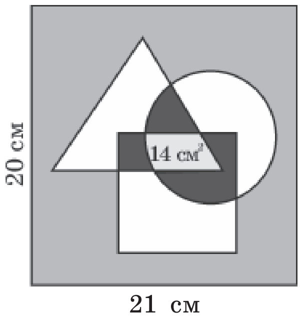


Рис. 39

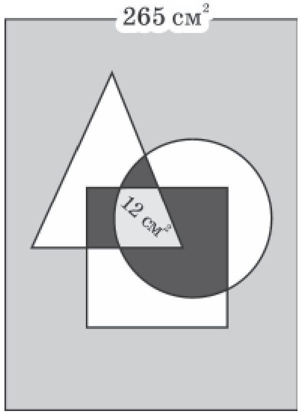


Рис. 40

1.5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ПУНКТА 1.4

24. 5 см. **25.** 11. **26.** 4. **27.** 9 см^2. **28.** 5 см. **29.** 9 м^2. **30.** 80 мм. **31.** 9 см^2. **32.** 7. **33.** 11. **34.** 16 см^2. **35.** 27. **36.** 25. **37.** 3 кг. **38.** 5. **39.** 312 мм^2. **40.** 25 мм и 10 мм. **41.** 600 мм^2. **42.** 18 см^2 и 12 см^2. **43.** 16. **44.** 2130 см^2. **45.** 1. **46.** 1300 м^2. **47.** 20. **48.** 2 м^2. **49.** 1. **50.** 280 дм^2. **51.** 20. **52.** 700 мм^2 и 500 мм^2. **53.** 30 больших вазонов, 37 белых вазонов и 50 круглых вазонов. **54.** 12 м^2 и 18 м^2. **55.** 150. **56.** 50 см^2 и 28 см^2. **57.** 9. **58.** 42 см^2. **59.** 4. **60.** 8 м. **61.** 98 см^2. **62.** 12. **63.** 14 м^2. **64.** 280 дм^2. **65.** 44. **66.** 3. **67.** 2 м^2. **68.** 15. **69.** 20 см^2. **70.** 8. **71.** 8 м^2. **72.** 80 см^2. **73.** 52. **74.** 60. **75.** 6 см. **76.** 8 см. **77.** 24. **78.** 30. **79.** 126 см^2. **80.** 43 см^2, 63 см^2 и 64 см^2. **81.** 15, 18 и 15.

Раздел 2

ЗАДАЧИ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЕЛИЧИН

В условиях задач с одной величиной X используются как значения x_1 и x_2 этой величины, так и их сумма $x_1 + x_2$, а также результаты $x_1 - x_2$ и $x_1 : x_2$ их разностного и кратного сравнений. Поскольку умножение величины на саму себя, а также умножение разных величин зачастую бывает осмысленным и широко используется в науке, например, когда умножение двух величин a и b порождает третью величину c, то использование произведения $x_1 \cdot x_2$ порождает другой класс задач. Этот класс задач использует тройку величин a, b, c, связанных пропорциональной зависимостью.

2.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗАДАЧИ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЕЛИЧИН

Простейшими задачами с пропорциональной зависимостью величин являются задачи с двумя процессами. Примерами таких задач являются задачи **82, 83** и **84**.

Задача 82. До Дворца один пешеход шел из Козловщины 5 ч, а второй — из Молчади 3 ч (рис. 41). Пешеходы шли с одинаковой скоростью, и первый из них прошел на 10 км больше. Найдите:

а) расстояние по шоссе между Молчадью и Дворцом;

б) расстояние по шоссе от Роготно до Козловщины и до Дворца, учитывая, что они относятся как 3 : 2 (см. [5, ч. 1], № 398, с. 147—148).

Рис. 41

Задача 83. Чтобы засеять 10 га рожью и 5 га озимой пшеницей, понадобилось 3 т 70 кг семян. Найдите нормы высева ржи и пшеницы, учитывая, что пшеницы на 1 га высевали на 40 кг меньше, чем ржи (см. [5, ч. 2], № 755, с. 100—101).

Задача 84. Есть две коробки конфет, в первой из них 24 конфеты, во второй — 36 конфет. Найдите количество рядов конфет в первой и второй коробках, учитывая, что вместе эти количества дают 7, а конфет в одном ряду первой коробки в 2 раза меньше (см. [5, ч. 1], № 266, с. 103).

В задаче **82** использованы процессы равномерного движения двух пешеходов, которые описываются формулой $s = vt$, выражающей зависимость покрытого пути s от скорости движения v и времени движения t. По условиям этой задачи известно, что $s_1 - s_2 = 10$ км, $v_1 : v_2 = 1$, $t_1 = 5$ ч, $t_2 = 3$ ч.

Задача **83** построена на зависимости $m = pS$ массы израсходованных семян от расхода p семян и площади S поля, описывающей процессы посева ржи и пшеницы. В соответствии с условиями задачи $m_1 + m_2 = 3$ т 70 кг, $p_1 - p_2 = 40$ кг/га, $S_1 = 10$ га, $S_2 = 5$ га.

Зависимость $N = n_0 n$ общего количества N конфет в коробке от количества n_0 конфет в одном ряду и количества n рядов конфет описывает процессы подсчета количества конфет в двух разных коробках, использованные в задаче **84**. Условия этой задачи таковы: $N_1 = 24$, $N_2 = 36$, $n_{02} : n_{01} = 2$, $n_1 + n_2 = 7$.

Как и в условиях задач с одной величиной, в условиях задач с пропорциональной зависимостью величин используются значения этих величин, а также сумма этих значений и результаты разностного и кратного сравнения значений.

Пусть зависимость между тройкой величин a, b, c задана формулой $a = bc$. Тогда условиями задачи с пропорциональной зависимостью величин могут быть:

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2,\ a_1 + a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1 + c_2,$$
$$a_1 - a_2,\ b_1 - b_2,\ c_1 - c_2,\ a_1 : a_2,\ b_1 : b_2,\ c_1 : c_2.$$

Эти 15 чисел назовем *характеристиками* задачи с пропорциональной зависимостью величин.

2.2. ДЕЛЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ВЕЛИЧИН

2.2.1. Задачи с четырьмя значениями переменных пропорциональной зависимости величин

Простейшая задача с пропорциональной зависимостью величин описывает два процесса. Тривиальное их описание означает указание шести именованных чисел:

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2.$$

Но это избыточное описание, так как указанные числа связаны двумя зависимостями $a_1 = b_1c_1$ и $a_2 = b_2c_2$. И поэтому указание любых двух значений тройки (a_1, b_1, c_1) и любых двух значений тройки (a_2, b_2, c_2) позволяет найти недостающие два значения и тем самые получить полное описание каждого из процессов.

Задачи на нахождение одного из трех чисел, связанных пропорциональной зависимостью, по данным двум числам решаются на I ступени общего среднего образования. Используются они и в V классе с усложнением некоторым дополнительным условием, как, например, в следующих задачах.

Задача 85. Велосипедист ехал 2 ч со скоростью 14 км/ч, после чего ему осталось еще проехать 25 км. Какое расстояние нужно было проехать велосипедисту? (см. [5, ч. 1], № 25, с. 15).

Задача 86. Когда собрали урожай ячменя с двух полей площадью 137 га и 209 га, то оказалось, что урожайность на первом поле на 4 ц/га больше. Определите, на сколько:

а) большим был бы урожай со второго поля, если бы его урожайность была равной урожайности первого поля;

б) меньшим был бы урожай с первого поля, если бы его урожайность была равной урожайности второго поля (см. [5, ч. 1], № 146, с. 57).

В V классе такие задачи предлагаются и в обобщенном виде без указания конкретных значений переменных, как, например, в следующих задачах.

Задача 87. Запишите формулу, связывающую пройденный путь s, скорость v и время движения t. Скажите, как найти:

а) пройденный путь, если известны скорость и время движения;

б) скорость движения, если известны пройденный путь и время движения;

в) время движения, если известны пройденный путь и скорость движения (см. [5, ч. 1], № 269, с. 103—104).

Задача 88. Запишите формулу, связывающую массу m собранного урожая, урожайность p поля и его площадь S. Скажите, как найти:

а) массу собранного урожая, если известны урожайность поля и его площадь;

б) урожайность поля, если известны масса собранного урожая и площадь поля;

в) площадь поля, если известны масса собранного урожая и урожайность поля (см. [5, ч. 1], № 270, с. 104).

Понятно, что задачи с четырьмя какими-либо независимыми характеристиками a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, описывающими два процесса, сводимы к описанным здесь задачам.

Задача 89. Из одного населенного пункта в другой выехал Сергей со скоростью 11 км/ч, через некоторое время после этого из другого пункта навстречу Сергею выехал Андрей со скоростью 13 км/ч. Когда велосипедисты встретились, то оказалось, что Сергей был в пути 4 ч, а Андрей проехал 39 км. Определите, кто из велосипедистов:

а) проехал больший путь и на сколько больший;

б) был в пути дольше и на сколько дольше.

2.2.2. Задачи с тремя значениями переменных пропорциональной зависимости величин

Среди четырех характеристик задачи могут быть не только абсолютные значения

$$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, \qquad (1)$$

но и какие-нибудь из характеристик

$$\begin{gathered} a_1 + a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1 + c_2,\ a_1 - a_2, \\ b_1 - b_2,\ c_1 - c_2,\ a_1 : a_2,\ b_1 : b_2,\ c_1 : c_2. \end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь рассмотрим задачи, которые содержат только одну из характеристик (2) и, следовательно, три какие-нибудь из характеристик (1). Все такие задачи сводимы к задачам предыдущего пункта, если любая тройка характеристик из рассматриваемой четверки содержит независимые характеристики.

Приведем примеры таких задач.

Задача 90. С первого поля урожайностью 37 ц/га и со второго поля урожайностью 41 ц/га вместе собрали 3038 ц ржи. Найдите урожай с каждого поля, учитывая, что площадь второго поля равна 38 га.

Условие задачи представим краткой записью в форме таблицы:

	Первое поле	Второе поле
Урожай	3038 ц	
Урожайность	37 ц/га	41 ц/га
Площадь		38 га

Теперь понятно, что урожай со второго поля составляет 41 ц/га · 38 га, т. е. 1558 ц. Но тогда урожай с первого поля равен 3038 ц – 1558 ц, т. е. 1480 ц.

Задача 91. На первом автомобиле грузоподъемностью 8 т и за 10 рейсов на втором перевезли 152 т груза. Учитывая, что на втором автомобиле перевезли 80 т груза, найдите:

а) грузоподъемность второго автомобиля;

б) количество рейсов, совершенных первым автомобилем.

Условие задачи представим таблицей:

	Первый автомобиль	Второй автомобиль
Масса груза	152 т	
		80 т
Грузоподъемность	8 т	
Количество рейсов		10

Сначала находим грузоподъемность второго автомобиля — получаем 80 т : 10, т. е. 8 т. Далее находим, что на первом автомобиле перевезли 152 т – 80 т, т. е. 72 т. Но тогда количество рейсов, совершенных первым автомобилем, равно 72 т : 8 т, т. е. 9.

Задача 92. Имеются два прямоугольника общей площадью 3058 см^2. Ширина первого прямоугольника равна 32 см, а второго — 42 см. Найдите длины прямоугольников, учитывая, что площадь второго прямоугольника равна 1554 см^2.

Условие задачи представим таблицей:

	Первый прямоугольник	Второй прямоугольник
Площадь	3058 см^2	
		1554 см^2
Ширина	32 см	42 см
Длина		

Сначала находим длину второго прямоугольника — получаем 1554 см^2 : 42 см, т. е. 37 см. Далее определяем, что площадь первого прямоугольника равна 3058 см^2 – 1554 см^2, т. е. 1504 см^2, но тогда длина первого прямоугольника равна 1504 см^2 : 32 см, т. е. 47 см.

2.2.3. Задачи с двумя значениями переменных пропорциональной зависимости величин

Теперь рассмотрим задачи, в условиях которых даны два значения каких-либо переменных пропорциональной зависимости величин и еще две какие-нибудь характеристики из (2). Отметим, что характеристики из (2) связаны с разными переменными, так как в противном случае полученная задача легко сводится к задаче с четырьмя значениями переменных. Пусть, например, в задаче даны характеристики $a_1 + a_2$, $a_1 - a_2$, b_2, c_1. Тогда первые две характеристики позволяют найти отдельные значения a_1 и a_2, и с учетом данных характеристик b_2 и c_1 получаем задачу типа a_1, a_2, b_2, c_1.

Перебирая возможные наборы характеристик этой группы задач, получаем, что возможны такие типы задач:

1. a_1, a_2, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$;
2. a_1, a_2, $b_1 + b_2$, $c_1 - c_2$;
3. a_1, a_2, $b_1 - b_2$, $c_1 - c_2$;
4. a_1, a_2, $b_1 : b_2$, $c_1 + c_2$;
5. a_1, a_2, $b_1 : b_2$, $c_1 - c_2$;
6. $a_1 + a_2$, $b_1 : b_2$, c_1, c_2;
7. $a_1 - a_2$, $b_1 : b_2$, c_1, c_2;
8. $a_1 : a_2$, $b_1 + b_2$, c_1, c_2;
9. $a_1 : a_2$, $b_1 - b_2$, c_1, c_2;
10. $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, c_1, c_2;
11. $a_1 + a_2$, $b_1 - b_2$, c_1, c_2;
12. $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$, c_1, c_2;
13. $a_1 - a_2$, $b_1 + b_2$, c_1, c_2.

При установлении возможных типов задач мы учитывали, что, например, четверка характеристик a_1, a_2, $b_1 - b_2$, $c_1 + c_2$ по сравнению с четверкой a_1, a_2, $b_1 + b_2$, $c_1 - c_2$ не порождает новый тип задач, так как переменные b и c в пропорциональной зависимости $a = bc$ являются компонентами произведения, а умножение имеет переместительное свойство.

Отметим, что задачи типов:

1. a_1, a_2, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$;
2. a_1, a_2, $b_1 + b_2$, $c_1 - c_2$;
3. a_1, a_2, $b_1 - b_2$, $c_1 - c_2$

моделируются квадратными уравнениями, и потому предлагать их учащимся можно не раньше VIII класса.

2.2.3.1. Задачи с известными произведениями и отношением значений одного из множителей

К этой группе задач относятся задачи, в условиях которых содержатся значения a_1 и a_2 произведения a пропорциональной зависимости $a = bc$, отношение $b_1 : b_2$ (или $c_1 : c_2$) значений одного из множителей b (или c) и сумма $c_1 + c_2$ (или $b_1 + b_2$) или разность $c_1 - c_2$ (или $b_1 - b_2$) значений другого множителя c (или b), т. е. задачи типов:

4. a_1, a_2, $b_1 : b_2$, $c_1 + c_2$;
5. a_1, a_2, $b_1 : b_2$, $c_1 - c_2$.

Обучение решению задач этих типов следует начинать с рассмотрения простейшего случая, когда отношение $b_1 : b_2 = 1$, т. е. когда

$$b_1 = b_2 = p,$$

где p — некоторое число, известное по условию задачи.

Покажем, что эти задачи сводятся к решению линейного уравнения и, следовательно, могут быть решены арифметическим способом.

Учитывая, что

$$a_1 = b_1c_1 \text{ и } a_2 = b_2c_2,$$

получаем равенства

$$a_1 = pc_1 \text{ и } a_2 = pc_2,$$

или

$$a_1 \pm a_2 = p(c_1 \pm c_2),$$

или

$$p = \frac{a_1 \pm a_2}{c_1 \pm c_2}.$$

Теперь, зная p, т. е. b_1 и b_2, и учитывая данные по условию значения a_1 и a_2, находим отдельные значения c_1 и c_2:

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1},\ c_2 = \frac{a_2}{b_2}.$$

Случай $b_1 : b_2 = k$, $k \neq 1$ сводится к простейшему следующим образом. Поскольку $b_1 : b_2 = k$, то $b_1 = kb_2$, а тогда

$$a_1 = kb_2c_1 \text{ и } a_2 = b_2c_2,$$

или

$$a_1 \pm a_2 = b_2(kc_1 \pm c_2),$$

или

$$b_2 = \frac{a_1 \pm a_2}{kc_1 \pm c_2}.$$

Рассмотрим теперь решение задач типов a_1, a_2, $b_1 : b_2$, $c_1 + c_2$ и a_1, a_2, $b_1 : b_2$, $c_1 - c_2$ из учебного пособия [5].

Порознь, отношение, сумма

$$a_1,\ a_2,\ b_1 : b_2,\ c_1 + c_2$$

$$b_1 : b_2 = 1$$

Задача 93. Первый и второй токари за одно и то же время изготовили 60 и 20 деталей соответственно. Найдите их производительности труда, учитывая, что за час они вместе изготавливают 20 деталей (см. [5, ч. 1], № 112, с. 43).

Условие задачи можно представить таблицей:

	Первый токарь	Второй токарь
Выполненная работа	60 дет.	20 дет.
Производительность	20 дет./ч	
Время работы	Одинаковое	

Первый и второй токари вместе изготовили 60 + 20, т. е. 80, деталей. По условию их общая производительность равна 20 дет./ч и они работали одинаковое время. Поэтому это время равно 80 дет. : 20 дет./ч, т. е. 4 ч. Значит, производительность первого токаря равна 60 дет. : 4 ч, т. е. 15 дет./ч, а производительность второго — 20 дет. : 4 ч, т. е. 5 дет./ч.

Задача 94. Токарь работал над заказом два дня с одной и той же производительностью и в первый день изготовил 104 детали, а во второй — 65 деталей. Найдите время работы токаря над заказом в первый и второй дни, учитывая, что всего он работал 13 ч (см. [5, ч. 1], № 113, с. 44).

Задача 95. С первого и второго полей, площади которых вместе составляют 80 га, собрали ячменя соответственно 2520 ц и 840 ц. Найдите площади полей, учитывая, что урожайности оказались одинаковыми (см. [5, ч. 1], № 148, с. 58).

Задача 96. С первого и второго полей, площадь каждого из которых равна 66 га, собрали ячменя соответственно 2970 ц и 2310 ц. Найдите урожайности первого и второго полей, учитывая, что вместе они составляют 80 ц/га (см. [5, ч. 1], № 179, с. 71).

$$b_1 : b_2 = n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

Задача 97. Токарь изготовил 48 деталей, а его ученик — 96 деталей. Найдите производительность токаря и ученика в отдельности, учитывая, что время работы токаря в четыре раза меньше, а вместе токарь и ученик за час изготавливают 18 деталей (см. [5, ч. 1], № 211, с. 84).

Условие задачи представим краткой записью:

	Токарь	Ученик
Выполненная работа	48 дет.	96 дет.
Производительность	18 дет./ч	
Время работы	В 4 раза меньше	

Уравняем время работы токаря с временем работы ученика. Если время работы токаря увеличить в 4 раза, то тогда и выполненная токарем работа увеличилась бы в 4 раза и стала бы равной 48 дет. · 4, т. е. 192 дет. Значит, вместе токарь и ученик выполнили бы работу, равную 192 дет. + 96 дет., т. е. равную 288 дет. Поскольку теперь время работы токаря и ученика одно и то же и их общая производительность равна 18 дет./ч, то время работы ученика равно 288 дет. : 18 дет./ч, т. е. 16 ч, а время работы токаря — 16 ч : 4, т. е. 4 ч. Тогда производительность ученика равна 96 дет. : 16 ч, т. е. 6 дет./ч, а производительность токаря — 48 дет. : 4 ч, т. е. 12 дет./ч.

Задача 98. Токарь изготовил 45 деталей, а его ученик — 25 деталей. Найдите производительности токаря и ученика, учитывая, что производительность токаря в 3 раза больше, а время его работы в сумме со временем работы ученика составляет 8 ч (см. [5, ч. 1], № 212, с. 84).

Задача 99. Есть две коробки конфет, в первой из них 48 конфет, во второй — 30 конфет. Найдите количество конфет в одном ряду первой и второй коробок, учитывая, что вместе эти количества дают 18, а рядов конфет в первой коробке в 2 раза больше (см. [5, ч. 1], № 265, с. 103).

Задача 100. Имеются две коробки конфет, в первой из них 30 конфет, во второй — 16 конфет. Найдите количество рядов конфет в первой и второй коробках, учитывая, что вместе эти количества дают 13, а конфет в одном ряду первой коробки в 3 раза больше.

Задача 101. Из одного населенного пункта выехал велосипедист, а через некоторое время навстречу ему из другого населенного пункта вышел пешеход. Когда они встретились, то оказалось, что велосипедист был в пути в 2 раза дольше и проехал 52 км, а пешеход прошел 8 км. Найдите скорости велосипедиста и пешехода, учитывая, что вместе они составляют 17 км/ч (см. [5, ч. 2], № 580, с. 43).

После освоения задач с целым отношением величин b_1 и b_2 можно переходить к задачам, в которых это отношение выражается дробью:

$$b_1 : b_2 = m : n,\ m,\ n \in \mathbb{N},$$
$$m > 1,\ n > 1.$$

Задача 102. Из одного населенного пункта выехал велосипедист, а через некоторое время навстречу ему из другого населенного пункта вышел пешеход. Когда они встретились, то оказалось, что скорости движения велосипедиста и пешехода относятся как 7 : 2, велосипедист проехал 56 км, а пешеход прошел 24 км. Найдите время нахождения в пути велосипедиста, учитывая, что это время в сумме со временем движения пешехода составляет 10 ч (см. [5, ч. 1], № 433, с. 166).

Условие задачи представим таблицей:

	Велосипедист	Пешеход
Путь	56 км	24 км
Скорость	7 долей	2 доли
Время	10 ч	

Уравняем скорость пешехода со скоростью велосипедиста, для чего ее сначала уменьшим в 2 раза, а затем полученный результат увеличим в 7 раз. Тогда соответствующим образом изменится и путь, пройденный пешеходом. Он станет равным 24 км : 2 · 7, т. е. 84 км. Этот путь вместе с путем, покрыт велосипедистом, составляют 84 км + 56 км, т. е. 140 км. Поскольку общее время движения велосипедиста и пешехода равно 10 ч, то скорость движения велосипедиста равна 140 км : 10 ч, т. е. 14 км/ч. Велосипедист проехал 56 км, поэтому его время нахождения в пути равно 56 км : 14 км/ч, т. е. 4 ч.

Задача 103. Из одного населенного пункта вышел пешеход, а через некоторое время навстречу ему из другого населенного пункта выехал велосипедист. Когда они встретились, то оказалось, что время движения велосипедиста относится ко времени движения пешехода как 2 : 3, велосипедист проехал 52 км, а пешеход прошел 24 км. Найдите скорости велосипедиста и пешехода, учитывая, что вместе они составляют 17 км/ч (см. [5, ч. 1], № 434, с. 166).

Задача 104. Количество пакетов, в которые расфасовано 60 кг моркови, относится к количеству пакетов, в которые расфасовано 360 кг картофеля, как 5 : 12. Учитывая, что пакет с картофелем вместе с пакетом с морковью весит 7 кг, найдите, сколько весит каждый пакет в отдельности (см. [5, ч. 2], № 912, с. 153).

Задача 105. Количество пакетов, в которые расфасовано 200 кг моркови, вместе с количеством пакетов, в которые расфасовано 180 кг картофеля, дает число 80. Найдите массу пакета с морковью, учитывая, что она относится к массе пакета с картофелем как 2 : 3 (см. [5, ч. 2], № 913, с. 153).

Задача 106. Первый и второй легковые автомобили проехали пути, которые относятся как 3 : 4, при этом они израсходовали 6 л и 10 л топлива соответственно. Найдите расход топлива каждого автомобиля, учитывая, что их общий расход составляет 9 л/100 км (см. [5, ч. 2], № 952, с. 163).

Условие задачи представим таблицей:

	Первый автомобиль	Второй автомобиль
Топливо	6 л	10 л
Расход топлива	9 л/100 км	
Путь	3 доли	4 доли

Уравняем пути, покрытые первым и вторым автомобилями, например, с путем, покрытым вторым автомобилем, т. е. путь, покрытый первым автомобилем, сначала уменьшим в три раза, а затем результат увеличим в четыре раза. Тогда соответствующим образом изменится и масса израсходованного топлива, получим, что первый автомобиль израсходовал топлива 6 л : 3 · 4, т. е. 8 л.

Теперь нужно 9 л/100 км разделить на две части так, чтобы одна часть составляла 8 долей, а другая — 10 долей. Получаем, что величина доли равна 9 л/100 км : (8 + 10), т. е. $\frac{1}{2}$ л/100 км. Значит, расход топлива первым автомобилем равен $\frac{1}{2}$ л/100 км · 8, т. е. 4 л/100 км, а расход топлива вторым автомобилем — $\frac{1}{2}$ л/100 км · 10, т. е. 5 л/100 км.

Задача 107. Из двух населенных пунктов, отстоящих на 550 км, навстречу друг другу выехали легковой автомобиль и грузовик. Когда они встретились, то оказалось, что легковой автомобиль израсходовал топлива 10 л, а грузовик — 30 л. При этом они расходовали на 100 км 6 л и 10 л соответственно. Найдите расходы топлива на 10 км легковым автомобилем и грузовиком, учитывая, что они относятся как 3 : 4 (см. [5, ч. 2], № 953, с. 164).

Порознь, отношение, разность

$$a_1,\ a_2,\ b_1 : b_2,\ c_1 - c_2$$

При обучении решению задач этого типа целесообразно придерживаться той же последовательности: вначале освоить задачи, в которых $b_1 : b_2 = 1$, затем $b_1 : b_2 = n$, и, наконец, $b_1 : b_2 = m : n$.

$$b_1 : b_2 = 1$$

Задача 108. Олег прочитал книгу, в которой помещены две повести. Первая из них занимает 108, а вторая — 180 страниц. Определите, сколько дней читал Олег каждую повесть, учитывая, что вторую повесть он читал на 4 дня дольше и каждый день прочитывал одно и то же количество страниц (см. [5, ч. 1], № 233, с. 90).

Условие задачи представим таблицей:

	Первая повесть	Вторая повесть
Количество страниц	108	180
Скорость чтения	Одна и та же	
Время		На 4 дня больше

Поскольку скорость чтения одна и та же, то вторую повесть Олег читал на 4 дня дольше из-за того, что она содержит на 180 – 108, т. е. на 72, страницы больше. Значит, скорость чтения равна 72 : 4, т. е. 18, страниц в день. Поэтому первую повесть Олег прочитал за 108 : 18, т. е. за 6, дней, а вторую — за 180 : 18, т. е. за 10, дней.

Задача 109. Максим прочитал две повести, затратив на каждую из них одно и то же количество дней. Первая повесть занимает 192 страницы, вторая — 168 страниц. Определите, по скольку страниц в день читал Максим вторую повесть, учитывая, что первую он читал на 3 страницы в день быстрее (см. [5, ч. 1], № 234, с. 91).

Задача 110. При одинаковой урожайности собрали ячменя с первого поля 1558 ц, а со второго — 1330 ц. Найдите площади полей, учитывая, что они отличаются на 6 га (см. [5, ч. 1], № 257, с. 97).

Задача 111. С двух полей одинаковой площади собрали ячменя: с первого — 1040 ц, а со второго — 962 ц. Найдите урожайности полей, учитывая, что они отличаются на 3 ц/га (см. [5, ч. 1], № 267, с. 103).

Задача 112. Отрезок *AB* точкой *E* разделен пополам, и на полученных частях *AE* и *BE* построены прямоугольники *AEFG* и *BEDC* с площадями 56 см^2 и 84 см^2 соответственно (рис. 42). Найдите длину отрезка *AB*, учитывая, что неравные стороны прямоугольников отличаются на 4 см (см. [5, ч. 1], № 268, с. 103).

$$b_1 : b_2 = n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

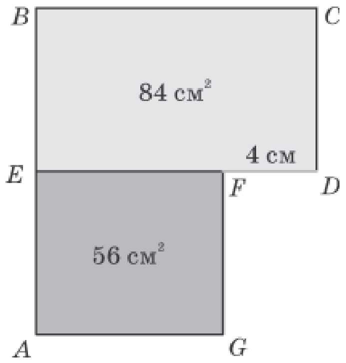


Рис. 42

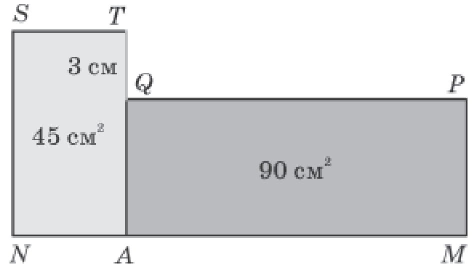


Рис. 43

Задача 113. Отрезок *MN* точкой *A* разделен так, что его часть *AM* в три раза больше части *AN*. На отрезках *AM* и *AN* построены прямоугольники *AMPQ* и *ANST* с площадями 90 см^2 и 45 см^2 соответственно (рис. 43). Найдите длину отрезка *MN*, учитывая, что стороны *AQ* и *AT* прямоугольников отличаются на 3 см (см. [5, ч. 1], № 343, с. 125—126).

Условие задачи представим краткой записью:

	Прямоугольник *AMPQ*	Прямоугольник *ANST*
Площадь	90 см^2	45 см^2
Первое измерение	В 3 раза больше	
Второе измерение		На 3 см больше

Уравняем первые измерения прямоугольников. Например, сделаем измерение *AM* прямоугольника *AMPQ* равным измерению *AN* прямоугольника *ANST*, т. е. уменьшим измерение *AM* в 3 раза. Это приведет к уменьшению площади прямоугольника *AMPQ* также в 3 раза: 90 см^2 : 3 = 30 см^2. Отличие этой площади от площади прямоугольника *ANST* на 45 см^2 – 30 см^2, т. е. на 15 см^2, вызвано тем, что второе измерение *AT* прямоугольника *ANST* на 3 см больше. Поэтому первое его измерение равно 15 см^2 : 3 см, т. е. 5 см. Теперь можно найти измерение AM и затем длину всего отрезка MN : 5 см · 3 = 15 см; 5 см + 15 см = 20 см.

Задача 114. С первого поля пшеницы собрали 518 ц, а со второго, площадь которого в четыре раза больше, — 1904 ц. Найдите урожайности полей, учитывая, что урожайность первого поля на 3 ц/га больше (см. [5, ч. 1], № 344, с. 126).

Задача 115. С первого поля собрали ячменя 546 ц, а со второго, площадь которого на 9 га меньше, собрали пшеницы 1071 ц. Найдите урожайности полей, учитывая, что урожайность второго поля в 3 раза больше (см. [5, ч. 1], № 345, с. 126).

Задача 116. Света прочитала книгу, в которой 120 страниц, а Егор — книгу, в которой 84 страницы, причем свою книгу Егор читал на 2 дня дольше. Найдите скорости, с которыми каждый из детей читал книгу, учитывая, что скорость чтения Светы была в два раза больше (см. [5, ч. 1], № 368, с. 134).

Задача 117. Федя прочитал повесть, занимавшую 189 страниц книги, а Зина — повесть, занимавшую 91 страницу, причем свою повесть Зина читала на 4 дня дольше. Найдите скорости, с которыми каждый из детей читал книгу, учитывая, что скорость чтения Зины была втрое меньше (см. [5, ч. 1], № 369, с. 134).

$$b_1 : b_2 = m : n,\ m,\ n \in \mathbb{N},\ m > 1,\ n > 1$$

Задача 118. Купили несколько карандашей на 9600 р. и несколько ручек на 12 000 р. Найдите цену карандаша и цену ручки, учитывая, что ручка на 800 р. дороже, а количество ручек относится к количеству карандашей как 3 : 4 (см. [5, ч. 1], № 400, с. 149).

Условие задачи представим краткой записью:

	Карандаши	Ручки
Стоимость	9600 р.	12 000 р.
Цена		На 800 р. больше
Количество	4 доли	3 доли

Уравняем количество карандашей с количеством ручек. Для этого 4 доли карандашей сначала уменьшим в 4 раза, а потом результат — 1 долю — увеличим в 3 раза. Тогда карандашей станет столько же, сколько и ручек, т. е. 3 доли. Соответствующим образом изменится и стоимость карандашей и станет равной 9600 р. : 4 · 3, т. е. 7200 р.

Получаем, что в этом случае за ручки заплатили бы на 12 000 р. – 7200 р., т. е. на 4800 р. больше. Это вызвано тем, что ручка на 800 р. дороже. Значит, ручек купили 4800 р. : 800 р., т. е. 6.

За 6 ручек заплатили 12 000 р., значит, цена ручки равна 12 000 р. : 6, т. е. 2000 р. А тогда цена карандаша составляет 2000 р – 800 р., т. е. 1200 р.

Задача 119. Купили несколько карандашей на 12 000 р. и несколько ручек на 12 600 р. Найдите цену карандаша и цену ручки, учитывая, что они относятся как 2 : 3, а ручек купили на 3 меньше (см. [5, ч. 1], № 401, с. 150).

Задача 120. На отрезке *AB* выбрана точка *C*, отстоящая от точки *B* на 15 см, и на отрезках *AB* и *AC* как на сторонах построены равносторонние многоугольники, количества сторон которых относятся как 2 : 3, а периметры равны 480 см и 540 см соответственно (рис. 44). Найдите количества сторон многоугольников (см. [5, ч. 1], № 447, с. 171).

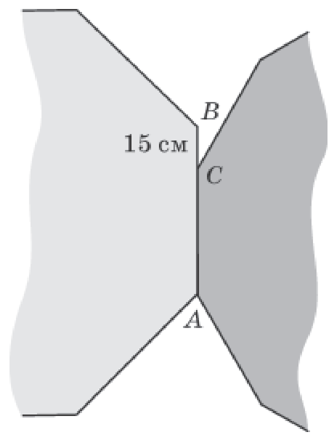


Рис. 44

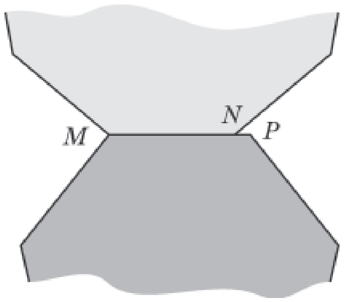


Рис. 45

Задача 121. На луче с началом M отложены отрезки MN и MP, длины которых относятся как 8 : 9 (рис. 45). На этих отрезках как на сторонах построены равносторонние многоугольники с периметрами 432 мм и 378 мм соответственно. Найдите количества сторон этих многоугольников, учитывая, что многоугольник со стороной MN имеет на 2 стороны больше (см. [5, ч. 1], № 448, с. 171—172).

Задача 122. В Брест из Полоцка и Мстиславля выехали два автомобилиста (рис. 46). Найдите скорости движения полоцкого и мстиславского автомобилистов, учитывая, что они относятся как 15 : 14 и то, что полоцкий автомобилист на дорогу затратил на 2 ч меньше (см. [5, ч. 2], № 667, с. 74).

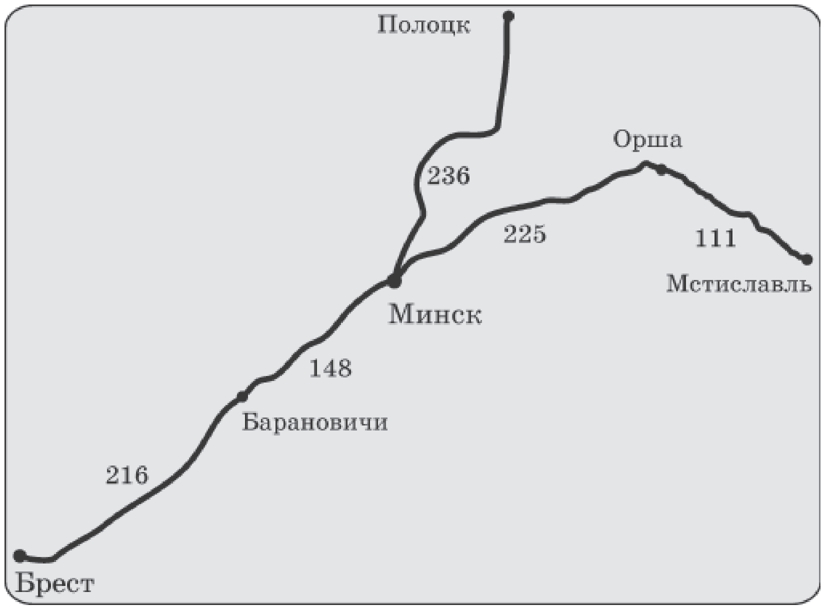


Рис. 46

Задача 123. В Гродно из Черикова и Пинска выехали два автомобилиста (рис. 47). Найдите время движения чериковского и время движения пинского автомобилистов, учитывая, что они относятся как 3 : 2 и то, что скорость пинского автомобилиста на 24 км/ч меньше (см. [5, ч. 2], № 668, с. 74—75).

Рис. 47

2.2.3.2. Задачи с известными значениями одного из множителей и отношением значений второго множителя

К этой группе задач относятся задачи, в условиях которых содержатся сумма $a_1 + a_2$ или разность $a_1 - a_2$ произведения a пропорциональной зависимости $a = bc$, отношение $b_1 : b_2$ (или $c_1 : c_2$) значений одного из множителей b (или c) и значения c_1 и c_2 (или b_1 и b_2) другого множителя c (или b), т. е. задачи типов:

6. $a_1 + a_2$, $b_1 : b_2$, c_1, c_2;
7. $a_1 - a_2$, $b_1 : b_2$, c_1, c_2.

Обучение решению этих типов целесообразно начинать также с рассмотрения простейшего случая, когда отношение $b_1 : b_2 = 1$, т. е. когда

$$b_1 = b_2 = p,$$

где p — некоторое число, известное по условию задачи.

Задачи типов 6 и 7 допускают решение арифметическими способами.

Учитывая, что

$$a_1 = b_1c_1 \text{ и } a_2 = b_2c_2,$$

получаем равенства

$$a_1 = pc_1 \text{ и } a_2 = pc_2,$$

или

$$a_1 \pm a_2 = p(c_1 \pm c_2),$$

или

$$p = \frac{a_1 \pm a_2}{c_1 \pm c_2}.$$

Теперь, зная p, т. е. b_1 и b_2, и учитывая данные по условию значения c_1 и c_2, находим отдельные значения a_1 и a_2:

$$a_1 = \frac{b_1}{b_1},\ c_2 = \frac{b_2}{b_2}.$$

Случай $b_1 : b_2 = k$, $k \neq 1$ сводится к простейшему следующим образом. Поскольку $b_1 : b_2 = k$, то $b_1 = kb_2$, а тогда

$$a_1 = kb_2c_1 \text{ и } a_2 = b_2c_2,$$

или

$$a_1 \pm a_2 = b_2(kc_1 \pm c_2),$$

или

$$b_2 = \frac{a_1 \pm a_2}{kc_1 \pm c_2}.$$

Рассмотрим теперь решение задач типов $a_1 + a_2$, $b_1 : b_2$, c_1, c_2 и $a_1 - a_2$, $b_1 : b_2$, c_1, c_2 из учебного пособия [5].

Сумма, отношение, порознь

$$a_1 + a_2,\ b_1 : b_2,\ c_1,\ c_2$$
$$b_1 : b_2 = 1$$

Задача 124. Есть 108 карандашей и коробки для их упаковки по 12 карандашей и по 6 карандашей. Найдите количество тех и других коробок, учитывая, что эти количества одинаковы (см. [5, ч. 1], № 321, с. 122).

Условие задачи представим таблицей:

	Коробки первого вида	Коробки второго вида
Всего карандашей	108	
Карандашей в коробке	12	6
Коробок	Одинаково	

Поскольку количество коробок первого и второго видов одинаково, то из этих коробок можно образовать некоторое количество пар. Одна такая пара содержит 12 + 6, т. е. 18, карандашей. А поскольку в коробках всего 108 карандашей, то пар карандашей есть 108 : 18, т. е. 6. Иначе количество коробок первого и количество коробок второго видов равны шести каждое.

Задача 125. Есть 7 коробок простых карандашей и 9 коробок цветных карандашей, в которых всего 96 карандашей. Найдите количество карандашей в той и другой коробках, учитывая, что оно одно и то же (см. [5, ч. 1], № 322, с. 122).

Задача 126. С двух полей одинаковой площади вместе собрали 3600 ц ячменя. Найдите, сколько ячменя собрали с каждого поля, учитывая, что урожайность полей равна 38 ц/га и 42 ц/га (см. [5, ч. 1], № 370, с. 134).

Задача 127. С двух полей площадью 15 га и 25 га вместе собрали 1640 ц овса. Найдите, сколько овса собрали с каждого поля, учитывая, что урожайность обоих полей одинакова (см. [5, ч. 1], № 371, с. 134).

$$a_1 + a_2,\ b_1 : b_2 = n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

Задача 128. За 5 рейсов первая машина и за 4 рейса вторая привезли на элеватор 52 т зерна. Найдите грузоподъемность каждой машины, учитывая, что грузоподъемность первой машины в два раза меньше (см. [5, ч. 1], № 442, с. 170).

Условие задачи представим таблицей:

	Первая машина	Вторая машина
Масса груза	52 т	
Грузоподъемность	В 2 раза меньше	
Количество рейсов	5	4

В соответствии с условием грузоподъемность второй машины в два раза больше. Уравняем ее с грузоподъемностью первой машины, т. е. уменьшим в два раза. Тогда, чтобы не изменилась масса перевезенного груза, нужно количество рейсов, сделанных второй машиной, увеличить в два раза. Это количество станет равным $4 \cdot 2$, т. е. 8, а количество рейсов, выполненных обеими машинами, равным $5 + 8$, т. е. 13. Учитывая, что масса перевезенного груза составляет 52 т, получим, что грузоподъемность первой машины равна 52 т : 13, т. е. 4 т. Тогда грузоподъемность второй машины равна 4 т $\cdot$ 2, т. е. 8 т.

Задача 129. Две машины грузоподъемностью 5 т и 6 т привезли на элеватор 69 т зерна. Найдите, сколько рейсов сделала та и другая машина, учитывая, что машина с большей грузоподъемностью сделала их в три раза больше (см. [5, ч. 1], № 443, с. 170).

Задача 130. При посеве гречихи на площади 200 га и пшеницы на площади 240 га было израсходовано вместе 64 т 600 кг семян. Определите нормы высева гречихи и пшеницы, учитывая, что норма высева гречихи в два раза меньше (см. [5, ч. 2], № 490, с. 16).

Задача 131. При посеве овса с нормой высева 195 кг/га и ячменя с нормой высева 180 кг/га было израсходовано вместе 30 т 870 кг семян. Определите площади, на которых посеяли овес и ячмень, учитывая, что для овса она в три раза меньше (см. [5, ч. 2], № 491, с. 17).

Задача 132. Книгу, в которой 224 страницы, Катя несколько дней читала по 16 страниц в день, а затем столько же дней — по 12 страниц в день. Найдите:

а) сколько дней читала книгу Катя;

б) сколько страниц книги прочитала Катя с большей скоростью (см. [5, ч. 2], № 532, с. 29).

Задача 133. На 200 столовых и 160 чайных ложек израсходовано 14 кг серебра. Найдите массу одной столовой и одной чайной ложки, учитывая, что масса чайной ложки вдвое меньше массы столовой (см. [5, ч. 2], № 576, с. 42).

Задача 134. Есть столовые ложки массой по 60 г и чайные ложки массой по 20 г, которых в три раза меньше. Вместе они весят 6 кг. Найдите количество столовых и количество чайных ложек (см. [5, ч. 2], № 577, с. 42).

$$b_1 : b_2 = m : n,\ m,\ n \in \mathbb{N},\ m > 1,\ n > 1$$

Задача 135. С двух полей площадью 25 га и 36 га вместе собрали 2640 ц тритикале. Найдите урожай с этих полей в отдельности, учитывая, что их урожайности относятся как 6 : 5 (см. [5, ч. 2], № 593, с. 48).

Условие задачи представим таблицей:

	Первое поле	Второе поле
Урожай	2640 ц	
Урожайность	6 долей	5 долей
Площадь	25 га	36 га

Уравняем урожайность первого поля с урожайностью второго, для чего урожайность первого поля сначала уменьшим в 6 раз, а затем результат увеличим в 5 раз. Для того чтобы не изменился урожай, нужно площадь первого поля уменьшить в 5 раз и полученный результат увеличить в 6 раз. Получим, что площадь первого поля должна быть равной 25 : 5 · 6, т. е. 30, га.

Теперь первое и второе поля вместе имеют площадь, равную 30 га + 36 га, т. е. 66 га. Учитывая, что общий урожай с этих полей равен 2640 ц, получаем, что урожайность второго поля равна 2640 ц : 66 га, т. е. 40 ц/га. Поэтому урожай со второго поля составляет 40 ц/га · 36 га, т. е. 1440 ц, а урожай с первого поля — 2640 ц – 1440 ц, т. е. 1200 ц.

Задача 136. С двух полей урожайностью 43 ц/га и 47 ц/га вместе собрали 6057 ц тритикале. Найдите урожай с каждого из этих полей, учитывая, что их площади относятся как 8 : 7 (см. [5, ч. 2], № 594, с. 49).

Задача 137. Путешественник 3 ч ехал на машине и затем 10 ч на поезде и всего проехал 840 км. Определите скорость движения поезда, учитывая, что она относится к скорости движения машины как 3 : 4 (см. [5, ч. 2], № 669, с. 75).

Задача 138. Первый автомобилист выехал из одного населенного пункта со скоростью 76 км/ч, второй выехал через некоторое время навстречу первому со скоростью 90 км/ч. Когда они встретились, то оказалось, что вместе они проехали 1224 км. Определите время движения первого автомобилиста, учитывая, что оно относится ко времени движения второго как 3 : 2 (см. [5, ч. 2], № 670, с. 75).

Задача 139. С двух полей площадью 43 га и 69 га вместе собрали 3255 ц тритикале. Найдите урожай, собранный с каждого поля, учитывая, что их урожайности относятся как 2 : 1 (см. [5, ч. 2], № 1009, с. 182).

Разность, отношение, порознь

$$a_1 - a_2,\ b_1 : b_2,\ c_1,\ c_2$$
$$b_1 : b_2 = 1$$

Задача 140. До Дворца один пешеход шел из Козловщины 5 ч, а второй — из Молчади 3 ч (см. рис. 41). Пешеходы шли с одинаковой скоростью и первый из них прошел на 10 км больше. Найдите:

а) расстояние по шоссе между Молчадью и Дворцом;

б) расстояния по шоссе от Роготно до Козловщины и до Дворца, учитывая, что они относятся как 3 : 2 (см. [5, ч. 1], № 398, с. 147).

Условие задачи представим краткой записью:

	Первый пешеход	Второй пешеход
Путь	На 10 км больше	
Скорость	Одна и та же	
Время	5 ч	3 ч

Скорость движения обоих пешеходов одинакова. Поэтому первый пешеход прошел на 10 км больше из-за того, что он был в пути на 5 ч – 3 ч, т. е. на 2 ч больше. Значит, скорость движения пешеходов равна 10 км : 2 ч, т. е. 5 км/ч.

Поскольку второй пешеход шел от Молчади до Дворца 3 ч, то расстояние по шоссе между этими населенными пунктами равно 5 км/ч · 3 ч, т. е. 15 км.

Задача 141. Из Кличева и Сергеевичей одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода, первый со скоростью 5 км/ч, второй со скоростью 4 км/ч (рис. 48). Они встретились, когда первый миновал Бацевичи и прошел еще 1 км. Учитывая, что второй из них прошел на 3 км меньше, найдите:

а) расстояние по шоссе между Кличевом и Сергеевичами;

б) расстояния по шоссе от Усохов до Бацевичей и до Сергеевичей, учитывая, что первое из них на 3 км меньше (см. [5, ч. 1], № 399, с. 148—149).

Рис. 48

Задача 142. На отрезке AB найдена его середина K и на полученных его частях KA и KB построены такие прямоугольники $KALM$ и $KBPQ$, что стороны AL и BP соответственно равны 60 мм и 40 мм и площадь прямоугольника $KALM$ на 640 мм^2 больше (рис. 49). Найдите периметр шестиугольника $ABPQML$ (см. [5, ч. 1], № 437, с. 167).

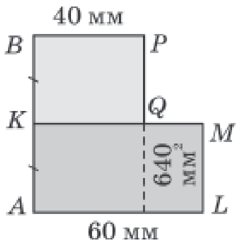


Рис. 49

Задача 143. Путешественник за 2 дня прошел весь путь. В первый день он шел 7 ч и прошел на 15 км больше, чем во второй день, когда он шел только 4 ч. Какова скорость путешественника, если она была одинаковой все время? Какой путь прошел путешественник за два дня? Составьте и решите обратную задачу (см. [5, ч. 1], № 438, с. 167).

Задача 144. Путешественник за 2 дня прошел весь путь. В первый день он шел со скоростью 4 км/ч и прошел на 6 км меньше, чем во второй день, в который он шел со скоростью 5 км/ч. Найдите путь, который прошел путешественник за два дня, и время его движения, учитывая, что оно одно и то же в оба дня (см. [5, ч. 1], № 444, с. 170).

Задача 145. За смену мастер, который работает с производительностью 25 деталей в час, изготовил на 72 детали больше, чем ученик, работающий с производительностью 16 деталей в час. Найдите продолжительность смены и общее количество изготовленных деталей (см. [5, ч. 1], № 445, с. 171).

Задача 146. Один рабочий за 7 ч изготовил на 57 деталей меньше другого рабочего, который работал с такой же производительностью 10 ч. Найдите эту производительность и общее количество изготовленных деталей (см. [5, ч. 1], № 446, с. 171).

Задача 147. Есть два прямоугольных параллелепипеда с одинаковыми основаниями и высотами, равными 10 см и 7 см (рис. 50). Найдите площади оснований параллелепипедов и их объемы, учитывая, что эти объемы отличаются на 60 см^3 (см. [5, ч. 2], № 492, с. 17).

Задача 148. Есть два прямоугольных параллелепипеда с одинаковыми высотами. Площади оснований параллелепипедов равны 35 см^2 и 77 см^2, а объемы отличаются на 336 см^3 (рис. 51). Найдите:

а) объемы параллелепипедов;

б) измерения паралелепипеда с большим объемом, учитывая, что измерения основания отличаются на 4 см (см. [5, ч. 2], № 493, с. 17).

$$b_1 : b_2 = n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

Задача 149. С поля урожайностью 25 ц/га собрали ячменя на 660 ц больше, чем с поля урожайностью 40 ц/га. Найдите площади полей, учитывая, что одна из них в четыре раза больше (см. [5, ч. 2], № 520, с. 26).

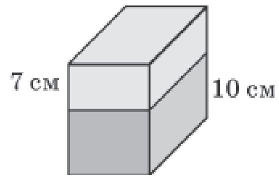


Рис. 50

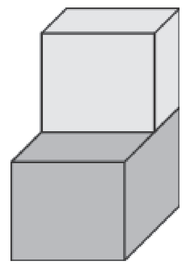


Рис. 51

Условие задачи представим краткой записью:

	Первое поле	Второе поле
Урожай	На 660 ц больше	
Урожайность	25 ц/га	40 ц/га
Площадь	В 4 раза больше	

Из условия следует, что площадь первого поля в 4 раза больше. Допустим, что площади обоих полей равны площади второго поля, т. е. площадь первого поля уменьшим в 4 раза. Тогда для того, чтобы с первого поля собрать прежний урожай, его урожайность должна быть увеличена в 4 раза: 25 ц/га · 4 = 100 ц/га. Видим, что при уравненных площадях урожайность первого поля была бы на 100 ц/га – 40 ц/га, т. е. на 60 ц/га больше. И это повлекло бы за собой дополнительный урожай в 660 ц. Значит, уменьшенная площадь первого поля и, следовательно, площадь второго поля равна 660 ц : 60 ц/га, т. е. 11 га. Тогда площадь первого поля равна 11 га · 4, т. е. 44 га.

Задача 150. С поля площадью 58 га собрали ячменя на 18 ц больше, чем с поля площадью 19 га. Найдите урожайности полей, учитывая, что урожайность второго поля в три раза больше (см. [5, ч. 2], № 521, с. 27).

Задача 151. Картофель расфасовали в пакеты по 6 кг, а морковь — в пакеты по 2 кг. Пакетов с картофелем получилось в три раза больше, а картофеля в них на 480 кг больше. Найдите, сколько получилось пакетов с картофелем (см. [5, ч. 2], № 578, с. 42).

Задача 152. В 60 одинаковых пакетах картофеля на 310 кг больше, чем в 25 одинаковых пакетах моркови. Найдите, сколько весит пакет картофеля, учитывая, что он в три раза тяжелее пакета моркови (см. [5, ч. 2], № 579, с. 43).

Задача 153. Ян сначала 3 ч ехал на велосипеде, а затем 5 ч поездом, причем поездом он проехал на 255 км больше. Найдите скорость движения Яна поездом, учитывая, что она в четыре раза больше скорости движения на велосипеде (см. [5, ч. 2], № 604, с. 51).

Задача 154. Яна сначала ехала на велосипеде со скоростью 13 км/ч, а затем поездом со скоростью 55 км/ч, причем поездом она проехала на 456 км больше. Найдите время движения Яны на велосипеде, учитывая, что оно в три раза меньше времени движения на поезде (см. [5, ч. 2], № 605, с. 51).

Задача 155. Путь, который проехал велосипедист за 4 ч, на 50 км больше пути, который прошел пешеход за 2 ч. Найдите скорости пешехода и велосипедиста, учитывая, что скорость велосипедиста втрое больше (см. [5, ч. 2], № 657, с. 68).

Задача 156. Скорости велосипедиста и пешехода равны соответственно 15 км/ч и 5 км/ч. Велосипедист проехал на 50 км больше, чем прошел пешеход. Найдите время движения велосипедиста, учитывая, что оно в два раза больше времени движения пешехода (см. [5, ч. 2], № 658, с. 68).

$$b_1 : b_2 = m : n,\ m,\ n \in \mathbb{N},\ m > 1,\ n > 1$$

Задача 157. На отрезке AB выбрана такая точка K, что $KA : KB = 3 : 4$ (рис. 52). На отрезках-частях KA и KB построены равносторонние восьмиугольник и пятиугольник соответственно. Найдите периметры многоугольников, учитывая, что периметр восьмиугольника на 48 см больше (см. [5, ч. 2], № 707, с. 84).

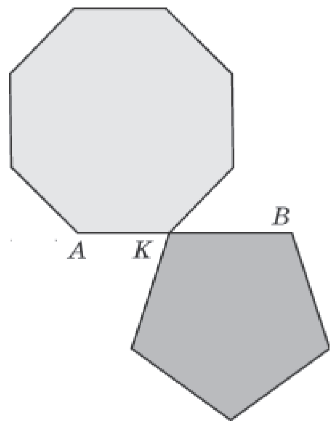


Рис. 52

Условие задачи представим краткой записью:

	Первый многоугольник	Второй многоугольник
Периметр	На 48 см больше	
Длина стороны	3 доли	4 доли
Количество сторон	8	5

Уравняем длины сторон многоугольников, например, с длиной стороны второго многоугольника. Для этого длину стороны первого многоугольника уменьшим в 3 раза и затем полученный результат увеличим в 4 раза. Для того чтобы периметр первого многоугольника не изменился, количество его сторон нужно уменьшить в 4 раза, а затем полученный результат увеличить в 3 раза. Получим, что количество сторон первого многоугольника станет равным $8 : 4 \cdot 3$, т. е. 6.

При равных длинах сторон периметр первого многоугольника больше на 48 см из-за того, что у него сторон больше на одну. Поэтому длина стороны измененного первого многоугольника и, значит, длина стороны второго многоугольника равна 48 см. Поскольку второй многоугольник имеет 5 сторон, то его периметр равен 48 см $\cdot$ 5, т. е. 240 см. Тогда периметр первого многоугольника равен 240 см + 48 см, т. е. 288 см.

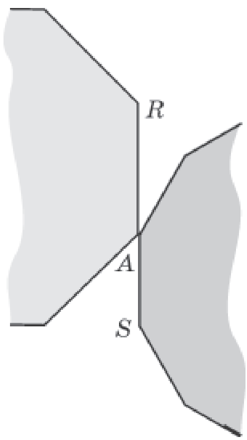


Рис. 53

Задача 158. На отрезке RS длиной 100 мм выбрана такая точка A, что $AR - AS = 18$ мм (рис. 53). На отрезках-частях AR и AS построены равносторонние многоугольники, количества сторон которых относятся как $2 : 3$. Найдите периметры многоугольников, учитывая, что у многоугольника со стороной AR периметр на 20 мм меньше (см. [5, ч. 2], № 708, с. 85).

Задача 159. Ира за 7 дней прочитала повесть, занимающую на 14 страниц больше повести, которую прочитал Олег за 12 дней. Найдите скорости, с которыми читали книги Ира и Олег, учитывая, что одна из них в два раза больше (см. [5, ч. 2], № 792, с. 112).

Задача 160. Янка читал по 15 страниц в день, а Зина — по 7 страниц в день. Янка прочитал повесть, которая занимает на 36 страниц меньше повести, которую прочитала Зина. Найдите время, за которое прочитали повести Янка и Зина, учитывая, что Зина читала книгу в три раза дольше (см. [5, ч. 2], № 793, с. 113).

Задача 161. Машина грузоподъемностью 5 т перевезла зерна на 2 т больше, чем машина грузоподъемностью 6 т. Определите, сколько рейсов сделала машина меньшей грузоподъемностью, учитывая, что количество ее рейсов относится к количеству рейсов другой машины как 5 : 4 (см. [5, ч. 2], № 922, с. 155).

Задача 162. Первая машина за 7 рейсов перевезла зерна на 4 т меньше, чем вторая машина за 10 рейсов. Найдите грузоподъемность первой и второй машин, учитывая, что они относятся как 4 : 3 (см. [5, ч. 2], № 923, с. 155).

2.2.3.3. Задачи с известными значениями одного из множителей и отношением значений произведения

К этой группе задач относятся задачи, в условиях которых содержатся отношение $a_1 : a_2$ значений a_1 и a_2 произведения a пропорциональной зависимости $a = bc$, сумма $b_1 + b_2$ (или $c_1 + c_2$) a_2 значений одного из множителей b (или c) и значения c_1 и c_2 (или b_1 и b_2) другого множителя c (или b), т. е. задачи типов:

8. $a_1 : a_2$, $b_1 + b_2$, c_1, c_2;
9. $a_1 : a_2$, $b_1 - b_2$, c_1, c_2.

Обучение решению задач этих типов также целесообразно начинать с рассмотрения простейшего случая, когда отношение $a_1 : a_2 = 1$, т. е. когда

$$a_1 = a_2 = p,$$

где p — некоторое число, известное по условию задачи.

Задачи типа 8 допускают арифметические решения.

Так как по условию $a_1 = a_2$, то подберем такие два числа b_1^1 и b_2^1, что

$$b_1^1 c_1 = b_2^1 c_2.$$

Если $b_1^1 + b_2^1 = b_1 + b_2$, то b_1^1 и b_2^1 — искомые значения переменной b, т. е.

$$b_1 = b_1^1 \text{ и } b_2 = b_2^1.$$

Если $b_1^1 + b_2^1 < b_1 + b_2$, то определяем, во сколько раз число $b_1 + b_2$ больше числа $b_1^1 + b_2^1$, т. е. находим частное $\frac{b_1 + b_2}{b_1^1 + b_2^1}$, которое показывает, во сколько раз надо увеличить подобранные числа b_1^1 и b_2^1, чтобы получить действительные значения b_1 и b_2 переменной b.

Если $b_1^1 + b_2^1 > b_1 + b_2$, то определяем, во сколько раз число $b_1^1 + b_2^1$ больше числа $b_1 + b_2$, т. е. находим частное $\frac{b_1^1 + b_2^1}{b_1 + b_2}$, которое показывает, во сколько раз надо уменьшить подобранные числа b_1^1 и b_2^1, чтобы получить действительные значения b_1 и b_2 переменной b.

Теперь, зная значения b_1 и b_2 и учитывая данные по условию значения c_1 и c_2, определяем значения a_1 и a_2.

Задачи, в которых $a_1 : a_2 = n$ и $a_1 : a_2 = m : n$ сводятся к случаю $a_1 : a_2 = 1$ после переформулирования условия.

Отношение, сумма, порознь

$$a_1 : a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1,\ c_2$$

$$a_1 : a_2 = 1$$

Задача 163. а) Картофель рассыпали в пакеты по 5 кг и 3 кг. Получилось 24 пакета. При этом масса всех пятикилограммовых пакетов такая же, как и всех трехкилограммовых. Найдите количество тех и других пакетов (см. [5, ч. 2], № 475, с. 14).

Условие задачи представим краткой записью:

	Меньший пакет	Больший пакет
Масса овощей	Одинаковая	
Масса пакета с овощами	3 кг	5 кг
Количество пакетов	24	

Обратим внимание на то, что масса пяти пакетов по 3 кг равна 3 кг · 5, т. е. 15 кг. Такую же массу имеют и три пакета по 5 кг, так как 5 кг · 3 = 15 кг. Вместе эти два количества составляют 5 + 3, т. е. 8, пакетов. А по условию всего пакетов 24, т. е. в 24 : 8, или в 3, раза больше. Поэтому пакетов по 3 кг имеется 5 · 3, т. е. 15, а пакетов по 5 кг — 3 · 3, т. е. 9.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. 3 кг · 5 = 15 кг — такую массу имеют 5 пакетов по 3 кг.
2. 5 кг · 3 = 15 кг — такую массу имеют 3 пакета по 5 кг.
3. 5 пакетов по 3 кг имеют такую же массу, как и 3 пакета по 5 кг, а вместе этих пакетов имеется 5 + 3, т. е. 8.
4. 24 : 8 = 3 — во столько раз больше действительное количество пакетов.
5. 5 · 3 = 15 — столько имеется пакетов по 3 кг.
6. 3 · 3 = 9 — столько имеется пакетов по 5 кг.

Ответ. 15 пакетов; 9 пакетов.

б) Картофель рассыпали в 18 меньших и 12 больших пакетов так, что масса всех меньших пакетов такая же, как и всех больших. Найдите массу большего и массу меньшего пакетов, учитывая, что вместе эти массы составляют 10 кг.

Условие задачи представим краткой записью:

	Меньший пакет	Больший пакет
Масса овощей	Одинаковая	
Масса пакета с овощами	10 кг	
Количество пакетов	18	12

Задача 164. а) С первого поля, площадь которого равна 70 га, собрали такой же урожай, как и со второго поля, площадь которого составляет 72 га. Найдите урожайности первого и второго полей, учитывая, что они вместе составляют 71 ц/га.

б) Урожайность первого поля составила 45 ц/га, а урожайность второго — 35 ц/га. Найдите площадь первого и площадь второго полей, учитывая, что вместе эти площади составляют 144 га, и то, что с обоих полей собрали одинаковые урожаи (см. [5, ч. 2], № 476, с. 14—15).

Задача 165. После того как первый рабочий с производительностью 9 деталей в час выполнил половину заказа, работу заканчивал второй рабочий с производительностью 12 деталей в час. Найдите время работы первого и время работы второго рабочего, учитывая, что заказ был выполнен за 7 ч (см. [5, ч. 2], № 533, с. 29).

Задача 166. После того как первый рабочий выполнил половину заказа, затратив 12 ч, работу заканчивал второй рабочий, который работал еще 9 ч. Найдите производительность труда первого и второго рабочего, учитывая, что вместе она составляет 14 деталей в час (см. [5, ч. 2], № 534, с. 29).

Задача 167. У одного хозяина есть козы и индюки, которых вместе 27. Учитывая, что у всех коз столько же ног, как и у всех индюков, найдите количество тех и других животных (см. [5, ч. 2], № 606, с. 51).

$$a_1 : a_2 = n,\ n \in N,\ n > 1$$

Задача 168. На отрезке PQ длиной 45 см выбрана точка A, и на полученных частях AP и AQ как на сторонах построены равносторонние двенадцатиугольник и восьмиугольник (рис. 54). Найдите периметры двенадцатиугольника и восьмиугольника, учитывая, что периметр восьмиугольника в три раза меньше (см. [5, ч. 2], № 663, с. 73).

Условие задачи представим краткой записью:

	Первый многоугольник	Второй многоугольник
Периметр		В 3 раза меньше
Длина стороны	45 см	
Количество сторон	12	8

В соответствии с условием периметр первого многоугольника в три раза больше. Уравняем его с периметром второго многоугольника, т. е. уменьшим в три раза. Это можно сделать, уменьшая количество сторон первого многоугольника в три раза. В результате количество его сторон станет равным 12 : 3, т. е. 4.

Теперь учтем то, что четыре отрезка по 6 см вместе составляют 6 см · 4, т. е. 24 см. Такую же длину имеют и восемь отрезков по 3 см, так как 3 см · 8 = 24 см. Вместе отрезки длинами 6 см и 3 см дают длину 6 см + 3 см, т. е. 9 см. А по условию сторона первого многоугольника вместе со стороной второго составляют 45 см и это больше 9 см в 45 см : 9 см, т. е. в 5 раз. Значит, сторона первого многоугольника равна 6 см · 5,

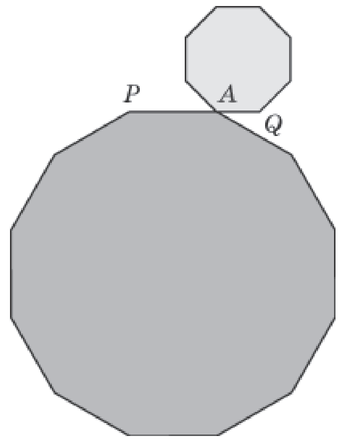


Рис. 54

т. е. 30 см, а сторона второго — 3 см · 5, т. е. 15 см. Поэтому периметр первого многоугольника равен 30 см · 12, т. е. 360 см, а периметр второго 15 см · 8, т. е. 120 см.

Задача 169. На отрезке *RS* длиной 90 дм выбрана точка *B*, отстоящая от точки *R* на 48 дм, и на полученных частях *BR* и *BS* как на сторонах построены равносторонние многоугольники, причем периметр многоугольника со стороной *BR* в два раза меньше (рис. 55). Найдите количество сторон многоугольников, учитывая, что в сумме они дают 23 (см. [5, ч. 2], № 664, с. 73).

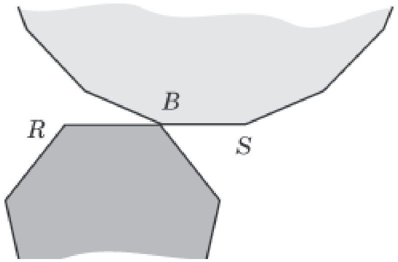


Рис. 55

Задача 170. За несколько ручек по 2000 р. уплатили в три раза больше, чем за несколько карандашей по 1200 р. Найдите, сколько куплено ручек и сколько карандашей, учитывая, что вместе их оказалось 14 (см. [5, ч. 2], № 760, с. 102).

Задача 171. За 10 ручек уплатили в три раза больше, чем за 5 карандашей. Найдите цену ручки и цену карандаша, учитывая, что вместе эти цены составляют 3000 р. (см. [5, ч. 2], № 761, с. 102).

Задача 172. Автомобилист со скоростью 85 км/ч покрыл путь в 10 раз больше пути, который покрыл велосипедист со скоростью 17 км/ч. Найдите, какое время был в пути автомобилист, учитывая, что это время вместе со временем движения велосипедиста составляет 9 ч (см. [5, ч. 2], № 880, с. 142).

Задача 173. Велосипедист за 4 ч покрыл путь в три раза больше пути, который прошел пешеход за 5 ч. Найдите скорость велосипедиста, учитывая, что вместе со скоростью пешехода она составляет 19 км/ч (см. [5, ч. 2], № 881, с. 142).

$$a_1 : a_2 = m : n,\ m,\ n \in \mathbb{N},$$
$$m > 1,\ n > 1$$

Задача 174. На отрезке *PQ* длиной 45 см выбрана точка *A*, и на полученных частях *AP* и *AQ* как на сторонах построены равносторонние двенадцатиугольник и восьмиугольник (рис. 56). Найдите стороны двенадцатиугольника и восьмиугольника, учитывая, что их периметры относятся как 3 : 4 (см. [5, ч. 2], № 944, с. 162).

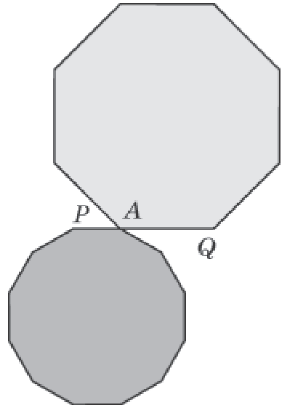


Рис. 56

Условие задачи представим краткой записью:

	Первый многоугольник	Второй многоугольник
Периметр	3 доли	4 доли
Длина стороны	45 см	
Количество сторон	12	8

Уравняем периметр первого многоугольника с периметром второго. Это можно сделать, сначала уменьшая количество сторон первого многоугольника в три раза, а затем результат увеличивая в четыре раза. В результате это количество станет равным 12 : 3 · 4, т. е. 16.

Теперь учтем то, что один отрезок длиной 16 см имеет такую же длину, как и два отрезка по 8 см, так как 8 см · 2 = = 16 см. Вместе отрезки длинами 1 см и 2 см дают длину 1 см + 2 см, т. е. 3 см. А по условию сторона первого многоугольника вместе со стороной второго составляют 45 см, и это больше 3 см в 45 см : 3 см, т. е. в 15 раз. Значит, сторона первого многоугольника равна 1 см · 15, т. е. 15 см, а сторона второго — 2 см · 15, т. е. 30 см.

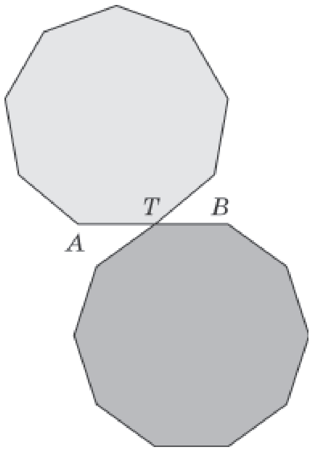


Рис. 57

Задача 175. На отрезке AB длиной 33 см выбрана точка T, отстоящая от точки B на 18 см, и на полученных частях TA и TB как на сторонах построены равносторонние многоугольники, периметры которых относятся как 20 : 27 (рис. 57). Найдите количество сторон этих многоугольников, учитывая, что они вместе дают число 17 (см. [5, ч. 2], № 945, с. 162).

Задача 176. Над заказом сначала работал первый рабочий с производительностью 6 дет./ч, а затем его заканчивал второй рабочий с производительностью 8 дет./ч. Всего было затрачено 13 ч. Найдите количество деталей, изготовленных первым и вторым рабочим, учитывая, что они относятся как 6 : 5 (см. [5, ч. 2], № 981, с. 174).

Задача 177. Над заказом сначала 10 ч работал первый рабочий, а затем 6 ч второй рабочий. Количества деталей, изготовленных первым и вторым рабочим, относятся как 4 : 3. Найдите производительность первого и производительность второго рабочего, учитывая, что вместе они составляют 27 дет./ч (см. [5, ч. 2], № 982, с. 174).

Задача 178. Пешеход со скоростью 5 км/ч прошел путь в два раза меньше, чем велосипедист со скоростью 15 км/ч. Найдите время, которое был в пути велосипедист, учитывая, что это время вместе со временем нахождения в пути пешехода составляет 5 ч (см. [5, ч. 2], № 1008, с. 182).

Отношение, разность, порознь

$$a_1 : a_2,\ b_1 - b_2,\ c_1,\ c_2$$

Обучение решению задач этого типа также целесообразно начинать с рассмотрения простейшего случая, когда отношение $a_1 : a_2 = 1$, т. е. когда

$$a_1 = a_2 = p,$$

где p — некоторое число, известное по условию задачи.

Задачи типа 9 могут быть решены арифметическими способами.

Так как по условию $a_1 = a_2$, то подберем такие два числа b_1^1 и b_2^1, что

$$b_1^1 c_1 = b_2^1 c_2.$$

Если $b_1^1 - b_2^1 = b_1 - b_2$, то b_1^1 и b_2^1 — искомые значения переменной b, т. е.

$$b_1 = b_1^1 \text{ и } b_2 = b_2^1.$$

Если $b_1^1 - b_2^1 < b_1 - b_2$, то определяем, во сколько раз число $b_1 - b_2$ больше числа $b_1^1 - b_2^1$, т. е. находим частное $\dfrac{b_1 - b_2}{b_1^1 - b_2^1}$, которое показывает, во сколько раз надо увеличить подобранные числа b_1^1 и b_2^1, чтобы получить действительные значения b_1 и b_2 переменной b.

Если $b_1^1 - b_2^1 > b_1 - b_2$, то определяем, во сколько раз число $b_1^1 - b_2^1$ больше числа $b_1 - b_2$, т. е. находим частное $\dfrac{b_1^1 - b_2^1}{b_1 - b_2}$, которое показывает, во сколько раз надо уменьшить подобранные числа b_1^1 и b_2^1, чтобы получить действительные значения b_1 и b_2 переменной b.

Теперь, зная значения b_1 и b_2 и учитывая данные по условию значения c_1 и c_2, определяем значения a_1 и a_2.

Задачи, в которых $a_1 : a_2 = n$ и $a_1 : a_2 = m : n$ сводятся к случаю $a_1 : a_2 = 1$ после переформулирования условия.

$$a_1 : a_2\ b_1 - b_2,\ c_1,\ c_2$$
$$a_1 : a_2 = 1$$

Задача 179. От Волковыска до Слонима велосипедист ехал со скоростью 20 км/ч, а назад — со скоростью 12 км/ч и на обратный путь затратил на 2 ч больше. Найдите расстояние по шоссе от Волковыска:

а) до Слонима;

б) до Зельвы, учитывая, что это расстояние на 14 км больше расстояния от Слонима до Зельвы (см. [5, ч. 2], № 556, с. 37—38).

Условие задачи представим краткой записью:

	До Слонима	До Волковыска
Путь	Один и тот же	
Скорость	20 км/ч	12 км/ч
Время		На 2 ч больше

Обратим внимание на то, что при движения до Слонима со скоростью 20 км/ч за 3 ч можно проехать такой же путь, как и при движении до Волковыска со скоростью 12 км/ч за 5 ч. Видим, что время движения до Волковыска больше на 5 ч – 3 ч, т. е. на 2 ч и это соответствует условию. Значит, от Волковыска до Слонима велосипедист ехал 3 ч, а поэтому расстояние по шоссе от Волковыска до Слонима равно 20 км/ч · 3 ч, т. е. 60 км.

Второе решение. Пусть после выезда велосипедиста из Слонима прошло время, равное времени, затраченному на поездку от Волковыска до Слонима. После этого велосипедист будет находиться в пути еще 2 ч и за это время проедет 12 км/ч · 2 ч, т. е. 24 км. Можно сказать и иначе,

теперь велосипедист отстал от прежнего графика на 24 км. Это отставание произошло из-за того, что его скорость уменьшилась на 20 км/ч – 12 км/ч, т. е. на 8 км/ч. Иными словами, каждый час велосипедист отставал на 8 км. Поэтому отставание происходило в течение 24 км : 8 км/ч, т. е. в течение 3 ч. Иными словами, велосипедист при поездке от Волковыска до Слонима был в пути 3 ч. Значит, расстояние по шоссе между этими городами равно 20 км/ч · 3 ч, т. е. 60 км.

Задача 180. От Славгорода до Иваново автомобилист ехал 6 ч, а назад — 8 ч. Найдите расстояние по шоссе между этими городами, учитывая, что скорости движения отличаются на 24 км/ч (см. [5, ч. 2], № 557, с. 39).

Условие задачи представим краткой записью:

	От Славгорода до Иваново	От Иваново до Славгорода
Путь	Одинаковый	
Скорость	На 24 км/ч больше	
Время	6 ч	8 ч

Заметим, что за 6 ч со скоростью 4 км/ч можно проехать 24 км и столько же можно проехать за 8 ч со скоростью 3 км/ч. Разность 4 км/ч – 3 км/ч равна 1 км/ч. Но на самом деле эта разность должна быть равной 24 км/ч, т. е. быть большей в 24 км/ч : 1 км/ч, или в 24 раза. Это означает, что автомобилист ехал от Славгорода до Иваново со скоростью 4 км/ч · 24, т. е. со скоростью 96 км/ч, а от Иваново до Славгорода — со скоростью 3 км/ч · 24, т. е. со скоростью 72 км/ч.

Записи учащегося в тетради могут быть следующими:

1. 4 км/ч · 6 ч = 24 км — столько можно проехать за 6 ч со скоростью 4 км/ч.

2. 3 км/ч · 8 ч = 24 км — столько можно проехать за 8 ч со скоростью 3 км/ч.

3. За 6 ч со скоростью 4 км/ч можно проехать столько же, сколько можно проехать за 8 ч со скоростью 3 км/ч.

4. 4 км/ч − 3 км/ч = 1 км/ч — на столько больше скорость 4 км/ч, чем скорость 3 км/ч.

5. 24 км/ч : 1 км/ч = 24 — во столько раз надо увеличить скорости 4 км/ч и 3 км/ч.

6. 4 км/ч · 24 = 96 км/ч — с такой скоростью ехал автомобилист от Славгорода до Иваново.

7. 3 км/ч · 24 = 72 км/ч — с такой скоростью ехал автомобилист от Иваново до Славгорода.

8. 96 км/ч · 6 ч = 576 км — таково расстояние по шоссе от Славгорода до Иваново.

Ответ. 576 км.

Задача 181. У всех коров, которые есть у одного хозяина, столько же ног, сколько их у всех его индюков. Определите, сколько есть коров и сколько индюков, учитывая, что индюков на 5 больше (см. [5, ч. 2], № 659, с. 68—69).

Условие задачи представим краткой записью:

	Коровы	Индюки
Всего ног	Одинаково	
Ног у одного животного	4	2
Животных		На 5 больше

$$a_1 : a_2 = n,\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

Задача 182. Есть 30 одинаковых пакетов с морковью и 72 одинаковых пакета с картофелем, причем пакет моркови весит на 3 кг меньше пакета с картофелем. Найдите, сколько весит пакет с морковью, учитывая, что картофеля в пакетах в 6 раз больше, чем моркови (см. [5, ч. 2], № 665, с. 73).

Условие задачи представим краткой записью:

	Морковь	Картофель
Масса овощей		В 6 раз больше
Масса пакета	На 3 кг меньше	
Количество пакетов	30	72

Задача 183. Есть шестикилограммовые пакеты с картофелем и двухкилограммовые пакеты с морковью. При этом пакетов с картофелем на 40 больше, а картофеля в них в 7 раз больше, чем в пакетах с морковью. Определите, сколько есть овощей во всех этих пакетах (см. [5, ч. 2], № 666, с. 74).

Условие задачи представим краткой записью:

	Морковь	Картофель
Масса овощей		В 7 раз больше
Масса пакета	2 кг	6 кг
Количество пакетов		На 40 пакетов больше

Уравняем массу моркови с массой картофеля. Это можно сделать, увеличивая массу пакета с морковью в семь раз. Тогда эта масса должна быть равной 2 кг · 7, т. е. 14 кг (см. [5, ч. 2], № 441, с. 171).

Теперь обратим внимание на то, что масса трех пакетов по 14 кг равна 14 кг · 3, т. е. 42 кг, и такая же масса семи пакетов по 6 кг, так как 6 кг · 7 = 42 кг. Видим, что тут пакетов с картофелем использовано больше на 7 − 3, т. е. на 4. Но по условию пакетов с картофелем больше на 40, т. е. количество учтенных тут пакетов нужно увеличить в 40 : 4, или в 10 раз. Значит, пакетов с картофелем есть 7 · 10, т. е. 70, а картофеля в них — 6 кг · 70, т. е. 420 кг.

Тогда моркови во всех пакетах есть 420 кг : 7, т. е. 60 кг, а всего овощей — 420 кг + 60 кг, т. е. 480 кг.

Задача 184. Есть два прямоугольных параллелепипеда — один высотой 8 см, второй высотой 9 см. Площадь основания второго паралелепипеда больше на 70 см^2, а объем больше в три раза (рис. 58). Найдите:

а) объемы параллелепипедов;

б) измерения оснований параллелепипедов, учитывая, что у первого паралелепипеда они отличаются на 1 см, у второго — на 9 см (см. [5, ч. 2], № 794, с. 113).

Задача 185. Есть два прямоугольных параллелепипеда — один с площадью основания 96 см^2, второй с площадью основания 36 см^2. Высота первого паралелепипеда больше на 3 см, а объем больше в четыре раза (рис. 59). Найдите:

а) объемы параллелепипедов;

б) измерения оснований параллелепипедов, учитывая, что у первого паралелепипеда они относятся как 3 : 8, у второго отличаются на 5 см (см. [5, ч. 2], № 795, с. 113).

Задача 186. За 8 карандашей уплатили столько же, сколько за 6 ручек. Найдите цену карандаша и цену ручки, учитывая, что эти цены отличаются на 500 р (см. [5, ч. 2], № 824, с. 124).

Задача 187. Купили несколько карандашей по 1200 р. и несколько ручек по 1800 р. и уплатили за карандаши столько же, сколько

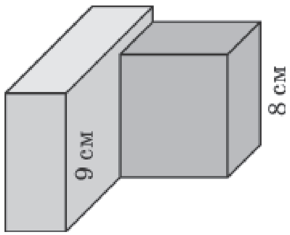


Рис. 58

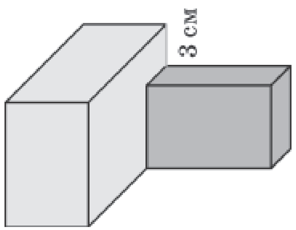


Рис. 59

и за ручки. Найдите, сколько купили карандашей и сколько ручек, учитывая, что ручек купили на 4 меньше (см. [5, ч. 2], № 825, с. 124).

Задача 188. От Марьиной Горки до Гродно машина ехала 4 ч, а назад — 5 ч, уменьшив свою скорость на 17 км/ч. Найдите расстояние по шоссе от Марьиной Горки:

а) до Гродно;

б) до Лиды, учитывая, что это расстояние относится к расстоянию от Лиды до Гродно как 58 : 27 (см. [5, ч. 2], № 846, с. 133).

Задача 189. В общежитии есть трехместные и пятиместные комнаты, причем пятиместных комнат на 42 больше. Найдите количество тех и других комнат, учитывая, что в больших комнатах мест в 4 раза больше (см. [5, ч. 2], № 882, с. 143).

Условие задачи представим краткой записью:

	Трехместные комнаты	Пятиместные комнаты
Всего мест		В 4 раза больше
Мест в комнате	3	5
Комнат		На 42 больше

Уравняем количество мест в трехместных комнатах с количеством всех мест в пятиместных комнатах, т. е. количество всех мест в трехместных комнатах увеличим в четыре раза. Для этого количество мест в трехместной комнате увеличим в четыре раза, т. е. сделаем его равным $3 \cdot 4$, или 12.

Пусть теперь двенадцатиместных комнат столько же, как и пятиместных, т. е. на 42 комнаты больше их действительного количества. Тогда количество мест в двенадцатиместных комнатах будет превышать количество мест в пятиместных комнатах на $12 \cdot 42$, т. е. на 504. Это превышение вызвано тем, что мест в двенадцатиместной комнате на 12 – 5, т. е. на 7, больше. Значит, количество пятиместных комнат равно 504 : 7, т. е. 72, а количество трехместных комнат — 72 – 42, т. е. 30.

Задача 190. В общежитии в 96 комнатах меньшей вместимости мест в 5 раз меньше, чем в 240 комнатах большей вместимости. Найдите вместимость комнат, учитывая, что комната большей вместимости на два места больше (см. [5, ч. 2], № 883, с. 143).

$$a_1 : a_2 = m : n,\ m,\ n \in \mathbb{N},\ m > 1,\ n > 1$$

Задача 191. Урожай ржи, собранный с поля площадью 56 га относится к урожаю ржи, собранному с поля площадью 21 га, как 16 : 5. Найдите урожайность большего поля, учитывая, что она на 7 ц/га больше урожайности меньшего поля (см. [5, ч. 2], № 954, с. 164).

Условие задачи представим краткой записью:

	Первое поле	Второе поле
Урожай	16 долей	5 долей
Урожайность	На 7 ц/га больше	
Площадь	56 га	21 га

Уравняем урожай с первого поля с урожаем со второго. Это можно сделать, сначала уменьшая площадь первого поля в 16 раз и затем полученный результат увеличивая в 5 раз. Тогда площадь первого поля стала бы равной 56 га : 16 · 5, т. е. $17\frac{1}{2}$ га.

Теперь учтем, что урожай с уменьшенного первого поля при урожайности 6 ц/га равен 6 ц/га · $17\frac{1}{2}$ га, т. е. 105 ц, и такой же урожай со второго поля при урожайности 5 ц/га,

так как 5 ц/га · 21 га = 105 ц. Видим, что при выбранных урожайностях урожайность первого поля больше на 6 ц/га – – 5 ц/га, т. е. на 1 ц/га. Но в действительности эта разность равна 7 ц/га, т. е. в 7 раз больше. Значит, урожайность первого поля равна 6 ц/га · 7, т. е. 42 ц/га.

Задача 192. Урожай ржи, собранный с первого поля урожайностью 40 ц/га относится к урожаю ржи, собранному со второго поля урожайностью 45 ц/га, как 14 : 15. Найдите площадь первого поля, учитывая, что она на 3 га больше площади второго поля (см. [5, ч. 2], № 955, с. 164—165).

Задача 193. От Мстиславля до Солигорска автомобилист ехал 5 ч, а назад — 5 ч 20 мин. Найдите расстояние по шоссе от Мстиславля до Солигорска, учитывая, что скорости движения отличаются на $4\frac{1}{2}$ км/ч (см. [5, ч. 2], № 980, с. 173).

Задача 194. На отрезке *MN* длиной 116 мм выбрана такая точка *C*, что отрезки *CM* и *CN* относятся как 14 : 15. На отрезках *CM* и *CN* как на сторонах построены равносторонние многоугольники, периметры которых относятся как 4 : 3 (рис. 60). Найдите количество сторон многоугольника, построенного на отрезке *CM*, учитывая, что оно на 3 больше количества сторон второго многоугольника (см. [5, ч. 2], № 983, с. 174).

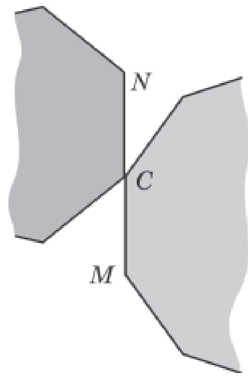


Рис. 60

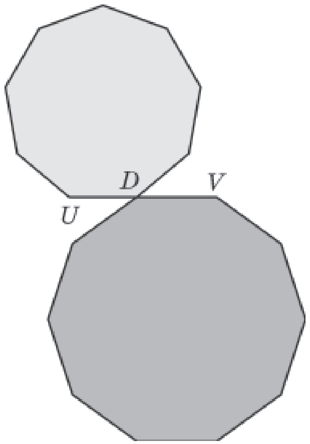


Рис. 61

Задача 195. На отрезке UV выбрана такая точка D, что $DV - DU = 6$ мм. На отрезках DU и DV как на сторонах построены равносторонние девятиугольник и десятиугольник, периметры которых относятся как 4 : 5 (рис. 61). Найдите отрезки DU и DV (см. [5, ч. 2], № 984, с. 174).

Задача 196. На отрезке AB выбрана такая точка T, что $TA - TB = 3$ мм. На отрезках TA и TB как на сторонах построены равносторонние девятиугольник и десятиугольник, периметры которых относятся как 24 : 25. Найдите отрезки TA и TB (см. [5, ч. 2], № 1010, с. 182).

2.2.3.4. Задачи, требующие уравнивания произведений

К этой группе задач относятся задачи, в условиях которых содержатся сумма $a_1 + a_2$ или разность $a_1 - a_2$ значений a_1 и a_2 произведения a пропорциональной зависимости $a = bc$, сумма $b_1 + b_2$ (или $c_1 + c_2$) или разность $b_1 - b_2$ (или $c_1 - c_2$) значений одного из множителей b (или c) и значения c_1 и c_2 (или b_1 и b_2) другого множителя c (или b), т. е. задачи типов:

10. $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, c_1, c_2;
11. $a_1 + a_2$, $b_1 - b_2$, c_1, c_2;
12. $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$, c_1, c_2;
13. $a_1 - a_2$, $b_1 + b_2$, c_1, c_2.

Сумма, сумма, порознь

$$a_1 + a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1,\ c_2$$

$$b_2 = \frac{a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)c_1}{c_2 - c_1}.$$

Решение задач этого типа можно начинать с допущения о равенстве известных значений множителя c. Уравняем, например, значение c_2 со значением c_1 и найдем разность суммы $a_1 + a_2$ и произведения $(b_1 + b_2)c_1$ — получим

$$a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)c_1 = a_1 + a_2 - b_1c_1 - b_2c_1 =$$
$$= a_1 + a_2 - a_1 - b_2c_1 = a_2 - b_2c_1 = b_2c_2 - b_2c_1 = b_2(c_2 - c_1).$$

Таким образом,

$$a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)c_1 = b_2(c_2 - c_1),$$

откуда

$$b_2 = \frac{a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)c_1}{c_2 - c_1}.$$

Поскольку по условиям задачи известны $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, c_1 и c_2, то можно вычислить значение b_2. Учитывая известное значение $b_1 + b_2$, найдем b_1, а уже затем и a_1, и a_2.

Таким образом, задачи этого типа допускают арифметическое решение.

Задача 197. С двух полей, площади которых равны 40 га и 36 га, вместе собрали 2444 ц ржи. Найдите урожайности полей, учитывая, что вместе они составляют 64 ц/га (см. [5, ч. 2], № 595, с. 49).

Условие задачи представим краткой записью:

	Первое поле	Второе поле
Урожай	2444 ц	
Урожайность	64 ц/га	
Площадь	40 га	36 га

Уравняем площади полей, например, с площадью второго поля. Поскольку с одного гектара первого поля и с одного гектара второго вместе собрали 64 ц, то с 36 га первого и с 36 га второго поля вместе собрали бы 64 ц/га · 36 га, т. е. 2304 ц. Это меньше собранного урожая на 2444 ц – 2304 ц, т. е. на 140 ц. Разность в 140 ц получилась из-за того, что первое поле было уменьшено на 40 га – 36 га, т. е. на 4 га. Значит, урожайность первого поля равна 140 ц : 4 га, т. е. 35 ц/га. А тогда урожайность второго поля составляет 64 ц/га – 35 ц/га, т. е. 29 ц/га.

Задача 198. С двух полей, урожайности которых равны 25 ц/га и 36 ц/га, вместе собрали 2444 ц ржи. Найдите площади полей, учитывая, что вместе они составляют 85 га (см. [5, ч. 2], № 596, с. 49).

Задача 199. Туристы за 7 ч прошли пешком и проехали автобусом 230 км. Найдите, сколько времени они шли пешком, учитывая, что автобус проезжал 70 км за час, а пешком туристы проходили 5 км за час (см. [5, ч. 2], № 718, с. 87—88).

Задача 200. Туристы 3 ч шли пешком и 5 ч ехали автобусом и всего преодолели расстояние в 340 км. Определите, с какой скоростью они шли пешком, учитывая, что эта скорость вместе со скоростью движения автобуса дает 70 км/ч (см. [5, ч. 2], № 719, с. 88).

Задача 201. На отрезке MN длиной 22 см выбрана точка B, и на отрезках-частях BM и BN как на высотах построены прямоугольные параллелепипеды (рис. 62), площади оснований которых соответственно равны 84 см^2 и 50 см^2, а общий объем — 1406 см^3. Найдите:

а) высоты параллелепипедов;

б) подбором измерения основания нижнего паралелепипеда, учитывая, что они отличаются на 5 см;

в) подбором измерения основания верхнего паралелепипеда, учитывая, что одно из них в два раза больше второго (см. [5, ч. 2], № 833, с. 129).

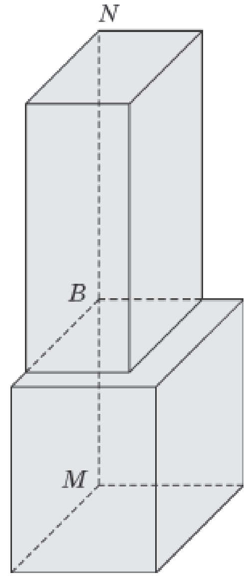


Рис. 62

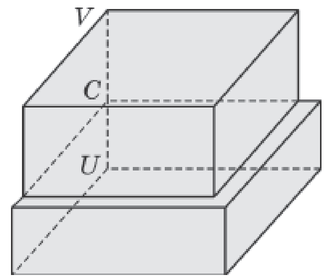


Рис. 63

Задача 202. На отрезке UV длиной 14 см выбрана точка C, отстоящая от точки V на 8 см, и на отрезках-частях CU и CV как на высотах построены прямоугольные параллелепипеды (рис. 63), площади оснований которых вместе составляют 1156 см^2, а общий объем равен 7956 см^3. Найдите:

а) отдельные объемы параллелепипедов;

б) подбором измерения оснований верхнего и нижнего параллелепипедов, учитывая, что большее из них на 4 меньше удвоенного меньшего (см. [5, ч. 2], № 834, с. 130).

Задача 203. Легковой автомобиль на путь в 60 км и грузовой на путь в 88 км израсходовали вместе 18 л топлива. Определите расход топлива на 100 км каждым автомобилем, учитывая, что на километр они вместе расходуют 230 мл топлива (см. [5, ч. 2], № 924, с. 155).

Задача 204. Легковой автомобиль с расходом топлива 5 л/100 км и грузовой с расходом 8 л/100 км израсходовали вместе 20 л топлива. Определите путь, пройденный каждым автомобилем, учитывая, что вместе они проехали 292 км (см. [5, ч. 2], № 925, с. 155).

Сумма, разность, порознь

$$a_1 + a_2,\ b_1 - b_2,\ c_1,\ c_2$$

Решение задач этого типа можно начинать с допущения о равенстве известных значений множителя c.

Уравняем, например, значение c_2 со значением c_1 и найдем разность суммы $a_1 + a_2$ и произведения $(b_1 - b_2)c_1$ — получим

$$a_1 + a_2 - (b_1 - b_2)c_1 = a_1 + a_2 - b_1c_1 + b_2c_1 =$$
$$= a_1 + a_2 - a_1 + b_2c_1 = a_2 + b_2c_1 = b_2c_2 + b_2c_1 = b_2(c_2 + c_1).$$

Таким образом,

$$a_1 + a_2 - (b_1 - b_2)c_1 = b_2(c_2 + c_1),$$

откуда

$$b_2 = \frac{a_1 + a_2 - (b_1 - b_2)c_1}{c_2 + c_1}.$$

Поскольку по условиям задачи известны $a_1 + a_2$, $b_1 - b_2$, c_1 и c_2, то можно вычислить значение b_2. Учитывая известное значение $b_1 + b_2$, найдем b_1, а уже затем и a_1, и a_2.

Таким образом, задачи этого типа допускают арифметическое решение.

Задача 205. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу и через 3 ч встретились. Найдите скорость каждого велосипедиста, учитывая, что первый проезжал за час на 4 км больше второго, а вместе они проехали 108 км (см. [5, ч. 2], № 647, с. 66).

Условие задачи представим краткой записью:

	Первый велосипедист	Второй велосипедист
Путь	108 км	
Скорость	На 4 км/ч больше	
Время	3 ч	3 ч

Уравняем скорость первого велосипедиста со скоростью второго, т. е. скорость первого велосипедиста уменьшим на 4 км/ч. Тогда путь, который он проехал, уменьшится на 4 км/ч · 3 ч, т. е. на 12 км, и путь, пройденный обоими велосипедистами, станет равным 108 км – 12 км, т. е. 96 км. На этот путь первый и второй велосипедисты затратили 3 ч + 3 ч, т. е. 6 ч. Значит, скорость второго велосипедиста равна 96 км : 6 ч, т. е. 16 км/ч, а скорость первого — 16 км/ч + 4 км/ч, т. е. 20 км/ч.

Задача 206. Первый велосипедист выехал из Червеня со скоростью 15 км/ч, а через 2 ч из Белыничей навстречу ему выехал второй велосипедист со скоростью 18 км/ч (рис. 64). Определите, на каком расстоянии от Березино встретились велосипедисты (см. [5, ч. 2], № 648, с. 66).

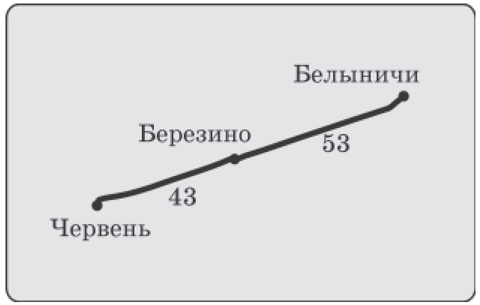


Рис. 64

Задача 207. Чтобы засеять 10 га рожью и 5 га озимой пшеницей, понадобилось 3 т 70 кг семян. Найдите нормы высева ржи и пшеницы, учитывая, что пшеницы на 1 га высевали на 40 кг меньше, чем ржи (см. [5, ч. 2], № 755, с. 100—101).

Условие задачи представим краткой записью:

	Рожь	Пшеница
Расход семян	3 т 70 кг	
Норма высева		На 40 кг/га меньше
Площадь	10 га	5 га

Процессы, описанные в задаче, — посев ржи и посев пшеницы — отличаются в двух отношениях: засеяны разные площади и нормы высева разные. Откажемся от второго отличия, т. е. допустим, что нормы высева одинаковы и равны, например, норме высева ржи. Тогда бы на 5 га, на которых была посеяна пшеница, было бы израсходовано семян больше на 40 кг/га · 5 га, т. е. на 200 кг. А всего было бы израсходовано семян 3070 кг + 200 кг, т. е. 3270 кг. Этими семенами была бы засеяна площадь, равная 10 га + + 5 га, т. е. 15 га. Поэтому расход семян на гектар, т. е. норма высева ржи, равен 3270 кг : 15 га, т. е. 218 кг/га. Тогда норма высева пшеницы равна 218 кг/га – 40 кг/га, т. е. 178 кг/га.

Задача 208. На первом поле посеяли ячмень с нормой высева 180 кг/га, на втором, площадь которого на 8 га больше, — тритикале с нормой высева 175 кг/га. Найдите площади полей, учитывая, что всего было израсходовано 14 т 180 кг семян (см. [5, ч. 2], № 756, с. 101).

Задача 209. Женя купил несколько карандашей по 2000 р. и на 4 меньше ручек по 5000 р., уплатив за все 29 000 р. Определите, сколько карандашей и сколько ручек купил Женя (см. [5, ч. 2], № 826, с. 124).

Задача 210. Ира купила 3 ручки и 8 карандашей, уплатив за все 14 800 р. Определите цену ручки и цену карандаша, учитывая, что ручка дороже на 900 р. (см. [5, ч. 2], № 827, с. 124).

Задача 211. Участок, на котором посажен картофель, имеет форму шестиугольника, составленного из двух прямоугольников *ABCD* и *EFGB* (рис. 65). Стороны *FG*, *GC* и *CD* этого шестиугольника соответственно равны 4 м, 3 м и 7 м, а площадь 144 м^2. Найдите другие стороны шестиугольника (см. [5, ч. 2], № 835, с. 130).

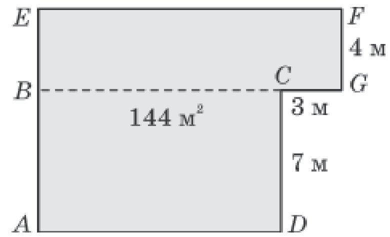


Рис. 65

Задача 212. Для детского сада купили несколько коробок цветных карандашей по 12 штук в коробке и на 4 меньше коробок цветных карандашей по 8 штук в коробке. Найдите, сколько коробок купили, учитывая, что в них всего 168 карандашей (см. [5, ч. 2], № 836, с. 130).

Задача 213. Для детского сада закупили 15 коробок цветных карандашей с одним количеством карандашей в коробке и 8 коробок цветных карандашей, в каждой из которых было на 6 карандашей больше. Найдите количество карандашей в коробках каждого вида, учитывая, что всего в коробках 324 карандаша (см. [5, ч. 2], № 837, с. 130).

Задача 214. Легковой автомобиль на путь в 75 км и грузовик на путь в 140 км израсходовали вместе 27 л топлива. Определите расход топлива на 100 км каждого автомобиля, учитывая, что на километр грузовик расходует топлива на 70 мл больше, чем легковой автомобиль (см. [5, ч. 2], № 956, с. 165).

Задача 215. Легковой автомобиль с расходом топлива 4 л/100 км и грузовик с расходом 10 л/100 км израсходовали вместе 11 л бензина. Определите путь, который прошел каждый автомобиль, учитывая, что грузовик проехал на 37 км меньше (см. [5, ч. 2], № 957, с. 165).

Разность, разность, порознь

$$a_1 - a_2,\ b_1 - b_2,\ c_1,\ c_2$$

Решение задач этого типа можно начинать с допущения о равенстве известных значений множителя c. Уравняем, например, значение c_2 со значением c_1 и найдем разность суммы $a_1 + a_2$ и произведения $(b_1 - b_2)c_1$ — получим

$$a_1 - a_2 - (b_1 - b_2)c_1 = a_1 - a_2 - b_1c_1 + b_2c_1 =$$
$$= a_1 - a_2 - a_1 + b_2c_1 = b_2c_1 - a_2 = b_2c_1 - b_2c_2 = b_2(c_1 - c_2).$$

Таким образом,

$$a_1 - a_2 - (b_1 - b_2)c_1 = b_2(c_1 - c_2),$$

откуда

$$b_2 = \frac{a_1 - a_2 - (b_1 - b_2)c_1}{c_1 - c_2}.$$

Поскольку по условиям задачи известны $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$, c_1 и c_2, то можно вычислить значение b_2. Учитывая известное значение $b_1 - b_2$, найдем b_1, а уже затем и a_1, и a_2.

Таким образом, задачи этого типа допускают арифметическое решение.

Задача 216. В первый день машина сделала 8 рейсов, во второй — 11 рейсов и перевезла на 15 т зерна больше. Определите, сколько зерна перевезла машина за первый и за второй день (см. [5, ч. 2], № 705, с. 84).

Задача 217. Машина грузоподъемностью 4 т перевезла на 14 т зерна меньше, чем вторая машина грузоподъемностью 6 т. Определите, сколько зерна перевезли первая и вторая машины, учитывая, что они сделали одинаковое количество рейсов (см. [5, ч. 2], № 706, с. 84).

Задача 218. Купили несколько карандашей по 1200 р. за карандаш и столько же ручек по 2000 р. за ручку. Найдите стоимость всей покупки, учитывая, что за карандаши уплатили на 4000 р. меньше (см. [5, ч. 2], № 790, с. 112).

Задача 219. Антон за 4 ручки уплатил на 4500 р. меньше, чем Аня за 7 таких же ручек. Найдите цену ручки (см. [5, ч. 2], № 791, с. 112).

Задача 220. В хозяйстве было 126 дойных коров. На следующий год дойных коров стало 138, и от них надоили за год на 83 160 кг молока больше, чем за предыдущий год. Найдите нынешнюю удойность коровы, учитывая, что ее прирост составил 180 кг (см. [5, ч. 2], № 838, с. 131).

Условие задачи представим краткой записью:

	Предыдущий год	Нынешний год
Надой		На 83 160 кг больше
Удойность		На 180 кг больше
Количество коров	126	138

Уравняем нынешнюю удойность коровы с удойностью в предыдущем году, т. е. уменьшим ее на 180 кг. Тогда надой уменьшится на 180 кг · 138, т. е. на 24 840 кг. С учетом этого надой в нынешнем году был бы больше, чем надой в предыдущем году, на 83 160 кг – 24 840 кг, т. е. на 58 320 кг. Столько молока получено от 138 – 126, т. е. 12, коров. Значит, удойность коровы в предыдущем году была равна 58 320 кг : 12, т. е. 4860 кг. Тогда нынешняя удойность равна 4860 кг + 180 кг, т. е. 5040 кг.

Задача 221. В первом хозяйстве удойность коровы оказалась равной 5120 кг, а во втором — 5310 кг. Годовой надой второго хозяйства получился на 105 300 кг больше. Найдите количество коров в первом хозяйстве, учитывая, что оно на 15 меньше количества коров во втором хозяйстве (см. [5, ч. 2], № 839, с. 131).

Задача 222. Вася прочитал повесть, занимающую на 22 страницы больше, чем повесть, которую прочитала Лена. Лена читала в день по 19 страниц, а Вася — по 13 страниц и на 4 дня дольше, чем Лена. Найдите, сколько страниц занимает та и другая повесть (см. [5, ч. 2], № 884, с. 144).

Условие задачи представим краткой записью:

	Повесть, прочитанная Васей	Повесть, прочитанная Леной
Количество страниц	На 22 с. больше	
Скорость чтения	13 с./день	19 с./день
Количество дней	На 4 дня больше	

Допустим, что Вася читал с той же скоростью, что и Лена. Поскольку он читал на 4 дня дольше, то за эти дни он прочитал бы на 19 · 4, т. е. на 76, страниц больше. Но это больше действительной разности прочитанных страниц на 76 – 22, т. е. на 54. Это вызвано тем, что в действительности Вася читал в день на 19 – 13, т. е. на 6, страниц меньше. Значит, Вася читал повесть 54 : 6, т. е. 9, дней и прочитал 13 с. · 9, т. е. 117 с. Тогда Лена читала повесть 9 – 4, т. е. 5, дней и прочитала 19 с. · 5, т. е. 95 с.

Задача 223. Повесть, которую за 7 дней прочитал Сергей, занимает на 6 страниц больше повести, которую за 9 дней прочитала Кира. Учитывая, что Кира читала в день на 4 страницы меньше, чем Сергей, найдите, сколько страниц занимает та и другая повесть (см. [5, ч. 2], № 885, с. 144).

Задача 224. У одного хозяина кур на 8 больше, чем коз, и у всех коз ног на 8 больше, чем у всех кур. Сколько есть кур и сколько коз? (см. [5, ч. 2], № 985, с. 174).

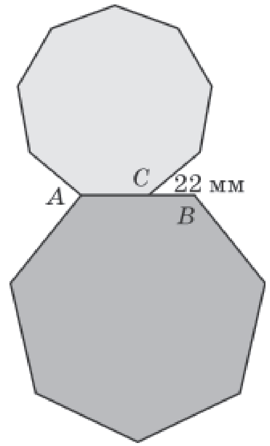


Рис. 66

Задача 225. На отрезке AB выбрана точка C, отстоящая от точки B на 22 мм. На отрезках AB и AC как на сторонах построены равносторонние семиугольник и девятиугольник (рис. 66). Найдите периметры многоугольников, учитывая, что у семиугольника он на 88 мм больше (см. [5, ч. 2], № 1011, с. 183).

Условие задачи представим краткой записью:

	Семиугольник	Девятиугольник
Периметр	На 88 мм больше	
Длина стороны	На 22 мм больше	
Количество сторон	7	9

Уравняем стороны многоугольников, например, со стороной девятиугольника, т. е. сторону семиугольника уменьшим на 22 мм. Тогда его периметр уменьшится на 22 мм · 7, т. е. на 144 мм, и в сравнении с периметром девятиугольника станет меньшим на 154 мм – 88 мм, т. е. на 66 мм. Эта разность связана с тем, что у семиугольника на 9 – 7, т. е. на 2, стороны меньше. Значит, сторона девятиугольника равна 66 мм : 2, т. е. 33 мм. Тогда его периметр равен 33 мм · 9 = 297 мм, а периметр семиугольника — 297 мм + + 88 мм, т. е. 385 мм.

Задача 226. На луче с началом A выбраны точки B и C, отстоящие от точки A на 47 мм и 41 мм соответственно (рис. 67), и на отрезках AB и AC как на сторонах построены равносторонние многоугольники. При этом сторон у первого многоугольника со стороной AB оказалось на 3 меньше, а его периметр — на 75 мм меньше. Найдите периметры многоугольников (см. [5, ч. 2], № 1012, с. 184).

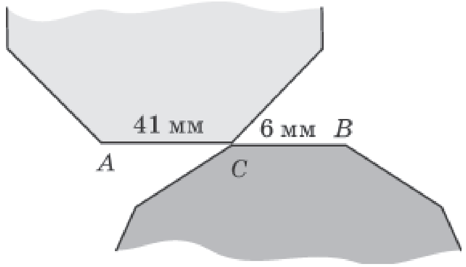


Рис. 67

Разность, сумма, порознь

$$a_1 - a_2,\ b_1 + b_2,\ c_1,\ c_2$$

Решение задач этого типа можно начинать с допущения о равенстве известных значений множителя c. Уравняем, например, значение c_2 со значением c_1 и найдем разность суммы $a_1 + a_2$ и произведения $(b_1 - b_2)c_1$ — получим

$$a_1 - a_2 - (b_1 + b_2)c_1 = a_1 - a_2 - b_1c_1 - b_2c_1 =$$

$$= a_1 - a_2 - a_1 - b_2c_1 = -a_2 - b_2c_1 = -b_2c_2 - b_2c_1 = b_2(-c_2 - c_1).$$

Таким образом,

$$a_1 - a_2 - (b_1 + b_2)c_1 = b_2(-c_2 - c_1),$$

откуда

$$b_2 = \frac{a_1 - a_2 - (b_1 + b_2)c_1}{-c_2 - c_1}.$$

Поскольку по условиям задачи известны $a_1 - a_2$, $b_1 + b_2$, c_1 и c_2, то можно вычислить значение b_2. Учитывая известное значение $b_1 + b_2$, найдем b_1, а уже затем и a_1, и a_2.

Таким образом, задачи этого типа допускают арифметическое решение.

Задача 227. На отрезке KL длиной 47 см выбрана такая точка P, что $PK - PL = 11$ см (рис 68). На отрезках-частях PK и PL как на сторонах построены равносторонние многоугольники, у которых вместе 22 стороны. Найдите периметры многоугольников, учитывая, что у многоугольника со стороной PK периметр на 67 см меньше (см. [5, ч. 2], № 753, с. 99).

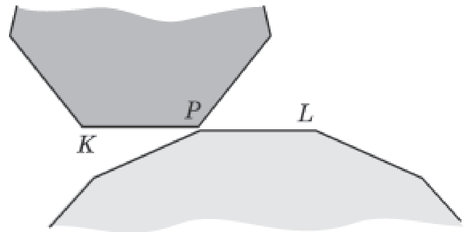


Рис. 68

Из условия о том, что отрезки PK и PL вместе составляют 47 см и $PK - PL = 11$ см, находим, что $PK = (47 \text{ см} + 11 \text{ см}) : 2 = 29$ см, а $PL = 29 \text{ см} - 11 \text{ см} = 18$ см.

Эти сведения и другие условия задачи представим краткой записью:

	Первый многоугольник	Второй многоугольник
Периметр	На 67 см меньше	
Длина стороны	29 см	18 см
Количество сторон	22	

Допустим, что оба многоугольника имеют одинаковое количество сторон, тогда этих сторон есть 22 : 2, т. е. 11.

С учетом этого периметр первого многоугольника был бы равен 29 см · 11, т. е. 319 см, а периметр второго многоугольника — 18 см · 11, т. е. 198 см.

Значит, периметр первого многоугольника на 319 см – – 198 см, т. е. на 121 см больше. Но по условию этот периметр на 67 см меньше. Получается, что периметр первого многоугольника нужно уменьшить на 121 см + 67 см, т. е. на 188 см.

Если на единицу уменьшить количество сторон первого многоугольника и увеличить количество сторон второго многоугольника, то отличие периметров этих многоугольников уменьшится на 29 см + 18 см, т. е. на 47 см. Поэтому количество сторон первого многоугольника нужно уменьшить, а количество сторон второго многоугольника нужно увеличить на 188 см : 47 см, т. е. на 4.

Поэтому первый многоугольник имеет 11 – 4, т. е. 7, сторон, а второй — 11 + 4, т. е. 15, сторон.

Задача 228. На отрезке *XY* длиной 104 мм выбрана точка *T* (рис. 69) и на отрезках-частях *TY* и *TX* как на сторонах построены

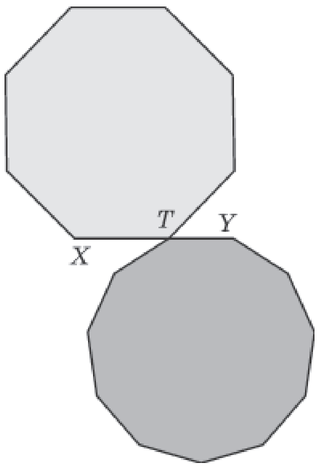


Рис. 69

равносторонние одиннадцатиугольник и восьмиугольник соответственно. Найдите периметры многоугольников, учитывая, что периметр восьмиугольника на 34 мм больше (см. [5, ч. 2], № 754, с. 100).

Условие задачи представим краткой записью:

	Одиннадцатиугольник	Восьмиугольник
Периметр		На 34 см больше
Длина стороны	104 см	
Количество сторон	11	8

Допустим, что длины сторон одиннадцатиугольника и восьмиугольника одинаковы, тогда эти длины равны 104 см : 2, т. е. 52 см каждая. С учетом этого периметр одиннадцатиугольника был бы равен 52 см · 11, т. е. 572 см, а периметр восьмиугольника — 52 см · 8, т. е. 416 см.

Значит, периметр восьмиугольника на 572 см – 416 см, т. е. на 156 см меньше. Но по условию этот периметр на 34 см больше. Получается, что периметр восьмиугольника нужно увеличить на 156 см + 34 см, т. е. на 190 см.

Если на сантиметр уменьшить длину стороны одиннадцатиугольника и увеличить длину стороны восьмиугольника, то отличие периметров этих многоугольников уменьшится на 11 см + 8 см, т. е. на 19 см. Поскольку отличие периметров составляет 190 см, то таких изменений периметров нужно выполнить 190 см : 19 см, т. е. 10.

В результате длина стороны одиннадцатиугольника уменьшится, а сторона восьмиугольника увеличится на 1 см · 10, т. е. на 10 см.

Поэтому сторона одиннадцатиугольника равна 52 см – – 10 см, т. е. 42 см, а сторона восьмиугольника — 52 см + + 10 см, т. е. 62 см. Значит, периметр одиннадцатиугольника равен 42 см · 11, т. е. 462 см, а периметр восьмиугольника — 62 см · 8, т. е. 496 см.

Записи учащихся в тетради могут быть следующими:

1. Пусть длины сторон одиннадцатиугольника и восьмиугольника одинаковы.
2. 104 см : 2 = 52 см — такими были бы длины сторон одиннадцатиугольника и восьмиугольника.
3. 52 см · 11 = 572 см — таким был бы периметр одиннадцатиугольника.
4. 52 см · 8 = 416 см — таким был бы периметр восьмиугольника.
5. 572 см – 416 см = 156 см — на столько был бы меньше периметр восьмиугольника.
6. 156 см + 34 см = 190 см — на столько нужно увеличить периметр восьмиугольника.
7. 11 см + 8 см = 19 см — на столько увеличится разность периметров восьмиугольника и одиннадцатиугольника, если на сантиметр уменьшить длину стороны одиннадцатиугольника и увеличить длину стороны восьмиугольника.
8. 190 см : 19 см = 10 — столько нужно выполнить таких изменений периметров.
9. 1 см · 10 = на 10 см — на столько нужно уменьшить сторону одиннадцатиугольника и увеличить сторону восьмиугольника.
10. 52 см – 10 см = 42 см — такова сторона одиннадцатиугольника.
11. 52 см + 10 см = 62 см — такова сторона восьмиугольника.
12. 42 см · 11 = 462 см — таков периметр одиннадцатиугольника.
13. 62 см · 8 = 496 см — таков периметр восьмиугольника.

Ответ. 462 см, 496 см.

Задача 229. Турист сначала шел со скоростью 4 км/ч, а затем ехал на велосипеде со скоростью 14 км/ч. Всего в пути он был 8 ч и на велосипеде проехал на 22 км больше. Найдите, сколько времени турист шел пешком (см. [5, ч. 2], № 828, с. 124).

Условие задачи представим таблицей:

	Пешком	На велосипеде
Путь	На 22 км больше	
Скорость	4 км/ч	14 км/ч
Время	8 ч	

Пусть время движения туриста пешком равно времени его движения на велосипеде. Тогда это время равно 8 ч : 2, т. е. 4 ч. За это время турист прошел бы 4 км/ч · 4 ч, т. е. 16 км, а проехал бы на велосипеде — 14 км/ч · 4 ч, т. е. 56 км. Значит, путь, пройденный на велосипеде, больше на 56 км – 16 км, т. е. на 40 км. Но в действительности этот путь больше на 22 км. Значит, отличие путей, пройденных пешком и на велосипеде нужно уменьшить на 40 км – 22 км, т. е. на 18 км.

Если на час увеличить время движения пешком и уменьшить время движения на велосипеде, то отличие путей уменьшится на 4 км/ч · 1 ч + 14 км/ч · 1 ч, т. е. на 18 км. Значит, таких уменьшений нужно выполнить 18 км : 18 км, т. е. 1.

Поэтому турист двигался пешком 4 ч + 1 ч, т. е. 5 ч.

Задача 230. Первый автомобилист за 9 ч проехал на 201 км больше второго, который был в пути 6 ч. Найдите скорости движения автомобилистов, учитывая, что вместе эти скорости составляют 164 км/ч (см. [5, ч. 2], № 829, с. 124).

Задача 231. С первого поля урожайностью 38 ц/га собрали на 116 ц пшеницы больше, чем со второго поля урожайностью 42 ц/га. Найдите отдельные площади полей, учитывая, что вместе эти площади составляют 102 га (см. [5, ч. 2], № 840, с. 131).

Задача 232. С первого поля площадью 41 га собрали ячменя на 142 ц больше, чем со второго поля площадью 47 га. Найдите отдельные урожайности полей, учитывая, что вместе они составляют 70 ц/га (см. [5, ч. 2], № 841, с. 131).

Задача 233. Легковой автомобиль с расходом топлива 6 л/100 км израсходовал топлива на 4 л меньше, чем грузовик с расходом топлива 10 л/100 км. Определите пути, пройденные каждым автомобилем, учитывая, что вместе они проехали 440 км (см. [5, ч. 2], № 986, с. 174—175).

Задача 234. Грузовик на путь в 250 км израсходовал на 20 л топлива больше, чем легковой автомобиль на путь в 200 км. Найдите расходы топлива грузовиком и легковым автомобилем, учитывая, что вместе на 100 км они расходуют 17 л (см. [5, ч. 2], № 987, с. 175).

В заключении раздела **2.2.3** приведем таблицу распределения задач с двумя значениями переменных пропорциональной зависимости величин (см. с. 119).

В таблице П означает *Порознь*, О — *Отношение*, С — *Сумма*, Р — *Разность*.

2.2.4. Задачи с одним значением переменных пропорциональной зависимости величин

Теперь рассмотрим задачи, в условиях которых дано только одно значение какой-нибудь переменной пропорциональной зависимости величин и три какие-нибудь характеристики из (2).

Эти задачи сводимы к задачам рассмотренных выше типов.

Если, например, дано значение какой-нибудь переменной пропорциональной зависимости $a = bc$, а одна из трех остальных характеристик также связана с этой переменной, то полученная задача сводима к задаче с двумя значениями одной переменной. Например, если даны характеристики a_1, $a_1 - a_2$, $b_1 : b_2$ и $c_1 - c_2$, то такая задача сводима к задаче типа a_1, a_2, $b_1 : b_2$ и $c_1 - c_2$.

§	ПОС	ПОР	СОП	РОП	ОСП	ОРП	ССП	СРП	РРП	РСП
4	112,113									
5	148									
6										
7	179									
8	211,221									
9		233,234								
10		257								
11	265,266	267,268								
12		343,344,345	321,322							
13		368,369	370,371							
14		400,401		398,399						
15				437,438						
16		447,448	442,443	444,445, 446						
17			490,491	492,493	475,476					
18			532	529,521	533,534					
19			576,577	578,579		556,557				
20			593,594	604,605	606		595,596			
21				657,658		659		647,648		
22		667,668	669,670		663,664	665,666				
23				707,708			717, 718,719		705,706	
24					760,761			755,756		753,754
25				792,793		794,795			790,791	
26						824,825		826,827		828,829
27						846	833,834	835,836,837	838,839	840,841
28					880,881	882,883			884,885	
29	914,915			922,923			924,925			
30	952,953				944,945	954,955		956,957		
31					981,982	980,983,984			985	986,987
32			1009		1008	1010			1011,1012	
	12	16	18	23	16	18	9	11	11	8

Задача 235. С первого поля собрали 2184 ц ржи, а со второго, урожайность которого на 4 ц/га больше, — на 77 ц меньше. Найдите площади первого и второго полей, учитывая, что они относятся как 8 : 7.

Условие задачи удобно представить таблицей:

	Первое поле	Второе поле
Урожай	2184 ц	На 77 ц меньше
Урожайность		На 4 ц/га больше
Площадь	8 : 7	

Учитывая сведения об урожае с первого и второго полей, найдем, что урожай со второго поля составляет 2184 ц – 77 ц, т. е. 2107 ц. Учитывая это, условие задачи представим краткой записью:

	Первое поле	Второе поле
Урожай	2184 ц	2107 ц
Урожайность		На 4 ц/га больше
Площадь	8 : 7	

В итоге получили задачу типа a_1, a_2, $b_1 : b_2$ и $c_1 - c_2$.

Если же дано значение какой-нибудь переменной пропорциональной зависимости $a = bc$, а три остальные характеристики связаны с другими переменными, то полученная задача сводима к задаче с тремя значениями.

Например, если даны характеристики a_1, $b_1 - b_2$, $b_1 : b_2$ и $c_1 - c_2$, то такая задача сводима к задаче типа a_1, b_1, b_2 и $c_1 - c_2$.

Задача 236. При посеве овса на первом поле израсходовали 87 ц 75 кг семян. На втором поле, площадь которого на 6 га

больше, посеяли ячмень. Найдите, сколько использовано овса, учитывая, что нормы высева ячменя и овса относятся как 12 : 13 и норма высева овса на 15 кг/га больше.

Условие задачи удобно представить таблицей:

	Овес	Ячмень
Расход семян	87 ц 75 кг	
Норма высева	13 : 12	
	На 15 кг/га больше	
Площадь		На 6 га больше

Учитывая условия задачи о нормах высева, найдем, что величина доли нормы высева равна 15 кг/га, а тогда норма высева овса равна 15 кг/га · 13, т. е. 195 кг/га, а ячменя — 15 кг/га · 12, т. е. 180 кг/га. Учитывая это, условие задачи представим таблицей:

	Овес	Ячмень
Расход семян	87 ц 75 кг	
Норма высева	195 кг/га	180 кг/га
Площадь	На 6 га больше	

В итоге получили задачу типа a_1, b_1, b_2 и $c_1 - c_2$.

2.2.5. Задачи без значений переменных пропорциональной зависимости величин

При рассмотрении задач, в условиях которых не содержится значений ни одной из переменных пропорциональной зависимости величин, т. е. когда все четыре характеристики задачи являются характеристиками типа (2), нужно заметить, что тогда две из этих характеристик будут связаны с какой-то одной переменной, и поэтому такая задача сводима к задаче с двумя значениями одной переменной.

Например, задача с характеристиками $a_1 + a_2$, $b_1 - b_2$, $b_1 : b_2$ и $c_1 - c_2$ сводима к задаче с характеристиками $a_1 + a_2$, b_1, b_2 и $c_1 - c_2$.

Задача 237. Из одного населенного пункта выехал велосипедист, а через час навстречу ему из другого пункта выехал еще один велосипедист. В момент встречи оказалось, что вместе они проехали 102 км. Найдите скорости первого и второго велосипедистов, учитывая, что они относятся как 2 : 3 и скорость первого велосипедиста на 6 км/ч меньше.

Условие задачи удобно представить таблицей:

	Первый велосипедист	Второй велосипедист
Путь	102 км	
Скорость	2 : 3	
	На 6 км/ч меньше	
Время	На 1 ч меньше	

Учитывая сведения о скорости, найдем, что величина доли скорости равна 6 км/ч. Тогда скорость первого велосипедиста равна 6 км/ч · 2, т. е. 12 км/ч, а скорость второго — 6 км/ч · 3, т. е. 18 км/ч. Учитывая это, условие задачи записывается в следующем виде:

	Первый велосипедист	Второй велосипедист
Путь	102 км	
Скорость	12 км/ч	18 км/ч
Время	На 1 ч меньше	

В итоге получили задачу типа $a_1 + a_2$, b_1, b_2 и $c_1 - c_2$.

Раздел 3

НЕСТАНДАРТНЫЕ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Воспитание самостоятельности и творческой активности учащихся в процессе изучения ими математики является одной из важнейших задач, стоящих перед учителями математики в учреждении общего среднего образования. Основным средством такого воспитания и развития являются задачи. Умением решать задачи характеризуется в первую очередь состояние математической подготовки учащихся, глубина усвоения учебного материала. Этим определяется повышенное внимание не только к обучению решению задач определенных видов, но и к обучению способам поиска решений новых, нетиповых задач. Важно не только усвоить определенный набор действий в стандартных ситуациях, но и подготовить учащегося к деятельности в новой, нетипичной обстановке, развить его мышление.

Понятно, что нельзя разделить задачи на тренировочные, рутинные, стандартные, с одной стороны, и нестандартные, развивающие — с другой. У учителя-мастера каждая задача несет элемент новизны, имеет свою привлекательную особенность, искристую грань. Вместе с этим рутинные действия сопровождают если не решение, то поиски решения каждой нестандартной задачи. Тем не менее разделение задач на тренировочные и нестандартные существует. К тренировочным отнесут, скорее всего, ту задачу, при решении которой превалирует алгоритмическая деятельность, а к нестандартным — ту, где преобладает поисковая деятельность.

Методика работы с нестандартными задачами существенно отличается от методики работы со стандартными. При освоении алгоритма важно понять его сущность, осознать каждый шаг, познакомиться со всеми возможными случаями, которые могут встретиться при его применении, довести пользование алгоритмом до навыка, если это предусматривается программой обучения. Работа с нестандартными задачами никак не ориентируется на усвоение определенных алгоритмов, здесь основная цель — знакомство с приемами мыслительной деятельности, такими как сравнение, анализ, обобщение и конкретизация, выдвижение гипотез и их проверка и др.

При работе над нестандартной задачей учитель выполняет для учащегося роль спутника, с которым интересней исследовать новое пространство. Для учителя важнее организовать диалог, стимулировать учащегося к проявлению самостоятельности. Понятно, что вначале роль учителя здесь нельзя переоценить, поскольку у учащегося практически отсутствует опыт самостоятельных действий в незнакомой ситуации, и его нужно постепенно приобретать. Поэтому учителю нельзя торопиться с подсказками, навязывать свои предложения учащимся. Тем более недопустимо сообщать готовое решение.

Устойчивый интерес к математике начинает формироваться в 13—15 лет. Однако это происходит не само по себе. Для того чтобы учащийся VII или VIII класса начал серьезно заниматься математикой, необходимо, чтобы еще раньше он ощутил, что поиски решения трудных, нестандартных задач могут приносить удовольствие, радость. Решение таких задач позволяет учащимся накапливать опыт сопоставления, наблюдения, выявления некоторых математических закономерностей, выдвижения гипотез, их обоснования и опровержения.

Интерес, который проявляют дети 10—13 лет к логическим задачам, математическим ребусам, головоломкам, свидетельствует о том, что целесообразно сделать доступными детям этого возраста отвечающие их возможностям нестандартные математические задачи, тем более что задержку в развитии в этом возрасте трудно компенсировать позже.

Каждая задача, которая предлагается учащимся для решения, может служить многим конкретным целям обучения. Но одна из главных целей решения задач — развить творческое и математическое мышление учащихся, заинтересовать их математикой, подвести к открытию математических фактов. Достичь этой цели с помощью одних стандартных задач невозможно, хотя стандартные задачи, без сомнения, полезны и необходимы, если они даются своевременно и в нужных дозах. Задачи, направленные на отработку того или иного математического алгоритма, навыка, задачи иллюстрационного плана, тренировочные упражнения необходимы в системе задач курса математики в учреждении общего среднего образования. Но следует избегать большого количества шаблонных, рутинных задач как на уроке, так и во внеклассной работе, поскольку в этом случае сильные учащиеся могут потерять интерес к математике. Включение нестандартных задач в образовательный процесс как раз и служит активизации поисковой активности учащихся, что является необходимым условием развития их самостоятельности, инициативы, дает возможность ощутить удовольствие от интеллектуальной победы.

Ознакомление учащихся только со специальными способами решения отдельных типов задач создает реальную опасность того, что учащиеся ограничатся усвоением одних шаблонных приемов и не приобретут умений самостоятельно искать пути решения незнакомых задач, поскольку не будут иметь опыта эвристической деятельности.

Помощь учителю в обучении решению нестандартных задач могут оказать книги [11], [12] и [13].

3.1. ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Логические задачи используют различные содержательные ситуации, определенные утверждения, которые могут быть истинными или ложными.

Задача 238. В семье 3 брата, а у каждого брата по одной сестре. Сколько детей в семье? (см. [5, ч. 2], № 535, с. 29).

Из условия задачи следует, что в семье только одна девочка и трое мальчиков. В семье, значит, четверо детей.

Задача 239. Трое рыбаков имеют общую лодку, и у каждого есть свой замок и ключ к нему. Как прикрепить лодку к берегу, чтобы каждый из рыбаков мог ей пользоваться, открыв один замок своим ключом? (см. [5, ч. 1], № 245, с. 93).

Можно предложить много способов, но при каждом, открыв один замок, нужно образовать разрыв в цепи, соединяющей лодку с берегом.

Задача 240. Есть три шарика — красный, зеленый и синий — и три ящика с надписями «красный», «зеленый», «красный или зеленый». Шарики по одному положили в ящики так, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Определите, где какой шарик находится (см. [5, ч. 1], № 27, с. 16).

Требуется переформулировать условие «неверно, что в ящике находится красный или зеленый шарик».

Поскольку ни одна из надписей не соответствует действительности, то в ящике с надписью «красный или зеленый» не может быть ни красного, ни зеленого шарика. Поэтому в этом ящике находится синий шарик. В ящике с надписью «красный» находится не красный и не синий шарик. Значит, в этом ящике находится зеленый шарик. А тогда красный шарик находится в ящике с надписью «зеленый». Результаты рассуждений можно свести в следующую таблицу:

	«красный»	«зеленый»	«красный или зеленый»
красный шарик	–	+	–
зеленый шарик	+	–	–
синий шарик	–	–	+

Задача 241. Три синих и три красных шарика разложили по два в три ящика с надписями «два синих», «два красных» и «синий и красный». В один ящик положили два синих шарика, еще в один — два красных, а оставшиеся шарики положили в третий ящик. Оказалось, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Каким образом могут быть распределены шарики? Можно ли, взяв один шарик из какого-либо ящика, сказать, какие шарики где лежат? (см. [5, ч. 1], № 64, с. 28).

Требуется переформулировать условие «неверно, что в ящике находятся синий и красный шарики».

В ящике с надписью «синий и красный» могут быть либо два синих, либо два красных шарика. В первом случае два красных шарика находятся в ящике «два синих», а синий и красный — в ящике «два красных». Во втором случае два синих шарика находятся в ящике «два красных», а синий и красный — в ящике «два синих». Поэтому, если взять один шарик из ящика «синий и красный», то можно определить распределение шариков по ящикам.

Задача 242. Из трех учеников А, Б, В — двое мальчиков. Определите, кто девочка, учитывая, что из учеников А и Б — мальчик один, а из учеников Б и В — девочка одна (см. [5, ч. 1], № 407, с. 151).

Ответ можно получить как перебором, так и рассуждениями.

Первый способ. Если определить, кто из учеников является девочкой, то два остальных будут мальчиками. Если бы А был девочкой, то тогда ученики Б и В оба были бы мальчиками. Но это противоречит тому, что из Б и В один ученик — девочка. Поэтому ученик А — мальчик. Поскольку из А и Б мальчик один, то Б — девочка. Таким образом, мальчики — это ученики А и В.

Второй способ. Поскольку из А и Б мальчик один, то ученик В является мальчиком. Поскольку из Б и В также мальчик один, то ученик А — мальчик. Получили, что мальчики — это ученики А и В.

Задача 243. Встретились трое друзей — певец Белоус, художник Рыжий и поэт Черняк. «Интересно, что у одного из нас волосы светлые, у второго черные, а у третьего рыжие», — сказал черноволосый. «Однако ни у кого цвет волос не соответствует фамилии», — ответил ему Рыжий. Какого цвета волосы у певца? (см. [5, ч. 1], № 90, с. 37).

Задача требует внимательности при анализе условия.

Для того чтобы иметь возможность фиксировать информацию о человеке и цвете его волос, используя таблицу, каждая клетка которой соответствует определенной комбинации, например, вторая пустая клетка в первой строке соответствует утверждению «волосы певца Белоуса черные».

	светлые	черные	рыжие
Певец Белоус			
Художник Рыжий			
Поэт Черняк			

Если это утверждение истинно, то в клетке поставим знак «+», а если ложно, то знак «–». С учетом информации Рыжего получаем следующую таблицу:

	светлые	черные	рыжие
Певец Белоус	–		
Художник Рыжий			–
Поэт Черняк		–	

Поскольку художник отвечал черноволосому, то он не черноволосый. Поэтому в центральную клетку таблицы ставим знак «–».

	светлые	черные	рыжие
Певец Белоус	–		
Художник Рыжий		–	–
Поэт Черняк		–	

Получается, что черные волосы не у художника и не у поэта. Значит, певец Белоус черноволосый. Это отражает следующая таблица:

	светлые	черные	рыжие
Певец Белоус	–	+	
Художник Рыжий		–	–
Поэт Черняк		–	

На основании информации, которую сообщил черноволосый, теперь легко закончить заполнение таблицы. Поскольку певец черноволосый, то его волосы не рыжие, волосы художника также не рыжие, то рыжие волосы имеет поэт, а поскольку во второй строке есть два знака «–», то в единственной свободной клетке должен стоять знак «+». Результатом работы с условием задачи является следующая таблица:

	светлые	черные	рыжие
Певец Белоус	–	+	–
Художник Рыжий	+	–	–
Поэт Черняк	–	–	+

Аналогичные рассуждения проводятся и при решении следующей задачи.

Задача 244. На заводе работают трое друзей: конструктор, электрик и токарь. Их фамилии: Ткачев, Кулеш и Батян. У конструктора нет ни братьев, ни сестер, и он самый младший из друзей. Батян женат на сестре Ткачева и старше токаря. Назовите фамилии конструктора и электрика (см. [5, ч. 2], № 609, с. 51).

Поскольку у Ткачева есть сестра, а у конструктора нет ни братьев, ни сестер, то Ткачев — не конструктор. Поскольку Батян старше токаря, а конструктор самый младший, то Батян — и не конструктор. Значит, конструктором является Кулеш. Батян старше токаря. Поэтому он — не токарь (и не конструктор). Получается, что Батян работает электриком, а Ткачев — токарем.

Задача 245. Из четырех монет одна — фальшивая. Она отличается от остальных только массой. Когда две монеты положили на рычажные весы, то: а) их равновесие нарушилось; б) весы остались в равновесии. Как с помощью еще одного взвешивания найти фальшивую монету? (см. [5, ч. 1], № 441, с. 167).

а) Если весы находятся не в равновесии, то на них есть фальшивая монета, а обе монеты, не лежащие на весах, настоящие. Снимем одну монету с весов и заменим ее настоящей. Если весы по-прежнему будут не в равновесии, то фальшивая монета та, которая находится на весах с самого начала. Если же весы пришли в равновесие, то теперь на весах обе монеты настоящие, а фальшивая монета та, которую мы сняли с весов.

б) Если весы находятся в равновесии, то обе монеты на них настоящие. Снимем с весов одну монету и на ее место положим ту, которая не была на весах. Если равновесие весов не нарушается, то взятая монета также настоящая, а фальшивой является последняя, четвертая монета. Если же равновесие весов нарушится, то фальшивой является положенная монета.

3.2. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ПЕРЕБОРОМ И ПОДБОРОМ

Задача 246. Дети играли в сыщиков и сосчитали, что из проехавших мимо машин было: 12 машин марки «Форд», 13 — темных цветов, 14 — везли пассжиров, в 15 за рулем были мужчины. Определите, каким могло быть: а) наименьшее количество машин; б) наибольшее количество машин (см. [5, ч. 1], № 181, с. 71).

Поскольку признаки, по которым велись подсчеты, независимые, то наименьшее количество машин — 15. Действительно, мимо детей могло проехать 15 машин с мужчинами за рулем. При этом 12 машин было марки «Форд», 13 — темных цветов, 14 — везли пассажиров.

Наибольшее же количество машин определить невозможно, так как могло проехать мимо сколько угодно, например, белых «Мерседесов» с женщинами за рулем и без пассажиров.

Задача 247. На складе есть краска в емкостях по 16 кг, 17 кг и 40 кг. Можно ли выдать 140 кг этой краски без ее переливания? (см. [5, ч. 1], № 405, с. 150).

Нужное количество краски можно выдать, если число 140 можно представить суммой чисел 16, 17, 40, взятых в определенных количествах. Подбор дает: $17 + 17 + 16 = 50$, $50 + 50 + 40 = 140$. Поэтому набрать 140 кг можно, взяв 4 емкости по 17 кг, 2 по 16 кг и одну в 40 кг.

Задача 248. Есть цепочка из 13 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Как, разрубив только одно звено, получить возможность с помощью образованных частей взвесить на рычажных весах груз массой 1 г, 2 г, 3 г, ..., 13 г? (см. [5, ч. 1], № 374, с. 134).

Если разрубить первое звено цепочки, то получатся части в 1 г и 12 г. С помощью полученных частей нельзя взвесить груз в 2 г.

Если разрубить второе звено цепочки, то получатся части в 1 г, 1 г и 11 г. С помощью полученных частей нельзя взвесить груз в 3 г.

Если разрубить третье звено цепочки, то получатся части в 2 г, 1 г и 10 г. С помощью полученных частей нельзя взвесить груз в 4 г.

Если разрубить четвертое звено цепочки, то получатся части в 3 г, 1 г и 9 г. С помощью полученных частей, очевидно, можно взвесить груз в 1, 3, 4, 9, 10, 12 и 13 граммов. Поскольку $2 = 3 - 1$, $5 = 9 - (1 + 3)$, $6 = 9 - 3$, $7 = 9 + 1 - 3$, $11 = 9 + 3 - 1$, то для взвешивания на чашечных весах любого груза до 13 г можно использовать образовавшиеся части. Например, если положить на одну чашку кусок цепочки из девяти звеньев, а на другую — из трех и рассеченное звено, то мы можем сравнить с 5 г вес неизвестного груза.

Задача 249. Четырем мотоциклистам нужно доставить пакет из одного места в другое за 250 км. Установите, смогут ли они это сделать, если полного бака топлива хватает мотоциклу на 120 км пути, учитывая, что получить топливо в дороге нельзя, можно только слить топливо из бака одного мотоцикла в бак другого (см. [5, ч. 2], № 721, с. 88).

Пакет будет доставлен по назначению тогда, когда хотя бы один мотоцикл сможет проехать нужные 250 км. Три же мотоцикла можно использовать в качестве носителей топлива. Неорганизованный подбор, скорее всего, не даст результата. Однако это не позволяет на вопрос задачи ответить «Нельзя».

Мотоцикл имеет смысл использовать в качестве носителя топлива только до тех пор, пока нельзя распределить оставшийся у него бензин между продолжающими движение мотоциклами. Первый раз три мотоцикла распределят между собой бензин, оставшийся в баке четвертого через 30 км от

начала движения. Именно в этот момент тремя мотоциклами будет вместе израсходовано столько бензина, которого хватило бы одному на 90 км пути, т. е. точно столько, сколько его остается в баке четвертого мотоцикла.

Три мотоцикла двигаются вместе 40 км. На этом пути два, которые продолжат движение, сожгут столько бензина, что его хватило бы одному на 80 км пути, т. е. точно столько, сколько его остается в баке третьего мотоцикла. Бензин из бака третьего мотоцикла распределяется в баки двух других, которые продолжат движение с полными баками.

Через 60 км бак одного из мотоциклов может вместить бензин, оставшийся в баке другого. После переливания бензина бак одного мотоцикла снова полон, и этот мотоцикл продолжит дальнейший путь. Он может проехать 120 км.

Найдем, на какое расстояние могут мотоциклисты доставить пакет. Сначала 30 км до первого переливания бензина, потом 40 км до второго переливания, потом еще 60 км до третьего и 120 км после третьего переливания, всего $30 + 40 + 60 + 120 = 250$ (км). Точно на такое расстояние и нужно доставить пакет.

3.3. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ УСЛОВИЯ

Переформулировка условия задачи — один из наиболее часто используемых приемов при решении задачи. По существу, во всех арифметических приемах решения текстовых задач используется переформулировка.

Задача 250. Машина прошла 50 000 км. При этом четыре ее колеса и одно запасное износились одинаково. Какое расстояние проехало каждое колесо? (см. [5, ч. 1], № 120, с. 45).

Вместе все колеса машины изнашивались на расстоянии $50\,000 \text{ км} \cdot 4 = 200\,000 \text{ км}$. Поэтому каждое колесо изнашивалось на расстоянии $200\,000 \text{ км} : 5 = 40\,000 \text{ км}$.

Можно рассуждать и так. Поскольку все колеса износились одинаково, то все они проехали одинаковые расстояния. А потому они одинаково «отдыхали». Поскольку 50 000 : 5 = = 10 000 (км), то каждое колесо «отдыхало» 10 000 км и ехало 50 000 – 10 000 = 40 000 (км).

Задача 251. Номер пряжи определяется количеством мотков по 1000 м в 1 кг пряжи. Определите:

а) каким будет номер пряжи, если 4000 м ее весят 200 г;

б) какой длины будет нить той же массы с номером 30;

в) сколько весит нить длиной 3000 м с номером 60 (см. [5, ч. 1], № 149, с. 58).

С математической точки зрения эта задача несложная — ответ на каждый из трех вопросов требует трех действий. Однако учителю нужно учитывать, что ситуация, которую нужно смоделировать учащимся, для них не является типичной, и это может существенно осложнить работу учащихся. Поэтому учителю, возможно, придется помогать учащимся наводящими вопросами. Сделав на доске запись-определение:

Номер пряжи — количество
1000-метровых мотков в 1 кг.

Учитель при поиске ответа на первый вопрос «Каким будет номер пряжи, если 4000 м ее весят 200 г?» акцентирует внимание на части определяющего «количество мотков в 1 кг» и на том, что в вопросе указано 200 г, т. е. массу нужно увеличить в 5 раз, а значит, в 5 раз увеличится и длина нити (до 20 000 м). После этого учитель переносит внимание на часть определяющего «количество 1000-метровых мотков», и учащимся становится понятным, что нужно определить, сколько раз по 1000 м будет в 20 000 м.

Задача 252. Расстояние между деревнями Громаки и Дивново 3 км. В Громаках есть 50 школьников, а в Дивнове — 100.

В каком месте нужно построить школу, чтобы расстояние, которое проходят все школьники, было наименьшим? (см. [5, ч. 1], № 150, с. 58).

Если строить школу на дороге из Громаков в Дивново (рис. 70), то расстояние от Громаков до школы будут проходить 50 учеников, а расстояние от Дивново до школы — 100 учеников. Если школу расположить вместо точки $Ш_1$ в точке $Ш_2$, ближе к Дивново (см. рис. 70), то расстояние между этими точками будут проходить вместо 100 только 50 учеников. Это означает, что чем ближе школа находится к Дивново, тем меньше общее расстояние, которое проходят все ученики. Поэтому школу нужно строить в Дивново.

Рис. 70

Задача 253. Три пальто стоят больше, чем 5 курток. Определите, могут ли:

а) 5 пальто стоить меньше, чем 7 курток;

б) 7 пальто стоить меньше, чем 13 курток (см. [5, ч. 2], № 988, с. 175).

Из условия задачи следует, что цена одного пальто больше цены $\frac{5}{3}$ куртки. Поэтому цена пяти пальто больше цены $\frac{5}{3} \cdot 5$, т. е. $8\frac{1}{3}$, куртки. Значит, 5 пальто не могут стоить меньше, чем 7 курток.

Цена семи пальто больше цены $\frac{5}{3} \cdot 7$, т. е. $11\frac{2}{3}$, куртки. Видно, что она может быть меньше цены 13 курток. Например, если пальто стоит 1 000 000 р., а куртка — 595 000 р., то 3 пальто стоят 3 000 000 р., 5 курток — 2 975 000 р., 7 пальто — 7 000 000 р, а 13 курток — 7 735 000 р.

Задача 254. Рыбаки выловили сетью в пруду 85 рыб, пометили их и снова выпустили в пруд. Во второй день они поймали 120 рыб, среди которых 6 оказались помеченными. Сколько всего рыб в пруду? (см. [5, ч. 2], № 1014, с. 184).

Будем считать, что 85 помеченных рыб равномерно распределились среди всех рыб пруда и среди рыб, пойманных во второй день. Поскольку среди пойманных 120 рыб помеченными оказалось 6, то помеченные рыбы составляют 20 долю всех. Значит, всего рыб в пруду $85 \cdot 20$, т. е. 1700.

Ответ. 1700 рыб.

3.4. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 255. Три понедельника месяца пришлись на четные числа. Каким днем недели было 19 число этого месяца? (см. [5, ч. 1], № 246, с. 93).

Поскольку неделя содержит 7 дней, то числа соседних понедельников отличаются четностью. Значит, между тремя понедельниками с четными числами есть два понедельника с нечетными числами, а всего месяц содержит 5 понедельников, причем первый понедельник должен приходиться на четное число месяца.

Если бы первый понедельник был 4-го числа, то пятый понедельник имел бы число, на 28 большее, но 32-го числа нет ни в каком месяце. Значит, первый понедельник был 2-го числа, 16-е число было также понедельником, а 19-е число было четвергом.

Задача 256. Два невисокосных года идут друг за другом. В первом понедельников больше, чем пятниц. Каких из семи дней недели больше содержит второй год? (см. [5, ч. 2], № 662, с. 69).

Поскольку $365 = 7 \cdot 52 + 1$, то невисокосный год содержит 52 полные недели и еще один день. Такой год начинается

и заканчивается одним и тем же днем недели. Из условия следует, что первый год начинается и заканчивается понедельником. Следующий год начинается и заканчивается вторником. Значит, второй год содержит больше вторников.

Задача 257. Сколько понедельников может быть в:
а) январе;
б) феврале;
в) марте;
г) январе, феврале и марте вместе? (см. [5, ч. 1], № 88, с. 36).

а) Учтем, что из семи дней недели только один день является понедельником. Поскольку $31 = 7 \cdot 4 + 3$, то январь содержит 4 полные недели и еще 3 дня. Каждая из полных недель содержит по одному понедельнику, а среди трех остальных дней может быть один понедельник, а может и не быть вообще. Таким образом, в январе может быть 4 или 5 понедельников.

б) В невисокосном году февраль содержит точно 4 недели. Поэтому в феврале невисокосного года будет точно 4 понедельника, а в феврале високосного года может быть 4 или 5 понедельников.

в) В марте может быть 4 или 5 понедельников, поскольку $31 = 7 \cdot 4 + 3$.

г) В високосном году январь, февраль и март вместе содержат $31 + 29 + 31$, т. е. 91, день. 91 день — это точно 13 недель. Поэтому в високосном году январь, февраль и март вместе содержат 13 понедельников. Если же год не является високосным, то он может содержать 13 или 12 понедельников.

3.5. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ С КОНЦА

Одним из продуктивных является способ рассуждения, при котором анализ ситуации начинается с конца процесса.

Задача 258. Летела стая гусей. На первое озеро села половина всех гусей и еще полгуся, на второе — половина всех остальных гусей и еще полгуся, на третье — половина оставшихся гусей и еще полгуся, на четвертое — половина остатка и еще полгуся и, наконец, на пятое — половина остальных и еще полгуся. После этого все гуси оказались на пяти озерах. Сколько гусей было в стае? (см. [5, ч. 2], № 928, с. 156).

Попробуем ответить на вопрос «Сколько гусей прилетело к пятому озеру и село на него?». Из условия следует, что полгуся составляет половину этого количества. Значит, на пятое озеро сел 1 гусь.

Сколько гусей прилетело к четвертому озеру? Половина их — это полгуся и еще 1 гусь. Значит, к четвертому озеру прилетело $\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot 2$, т. е. 3, гуся. Из них половина да еще полгуся, т. е. $3 : 2 + \frac{1}{2}$, т. е. 2, гуся сели на четвертое озеро, а 1 гусь полетел дальше.

Сколько гусей прилетело к третьему озеру? Половина их — это полгуся и еще 3 гуся. Значит, к третьему озеру прилетело $\left(\frac{1}{2}+3\right)\cdot 2$, т. е. 7, гусей. Из них половина да еще полгуся, т. е. $7 : 2 + \frac{1}{2}$, т. е. 4, гуся сели на третье озеро, а 3 гуся полетели дальше.

Сколько гусей прилетело ко второму озеру? Половина их — это полгуся и еще 7 гусей. Значит, ко второму озеру прилетело $\left(\frac{1}{2}+7\right)\cdot 2$, т. е. 15, гусей. Из них половина да еще полгуся, т. е. $15 : 2 + \frac{1}{2}$, т. е. 8, гусей сели на второе озеро, а 7 гусей полетели дальше.

Сколько гусей прилетело к первому озеру? Половина их — это полгуся и еще 15 гусей. Значит, к первому озеру прилетело $\left(\frac{1}{2}+15\right)\cdot 2$, т. е. 31, гусь. Из них половина да еще

полгуся, т. е. $31 : 2 + \frac{1}{2}$, т. е. 16, гусей сели на первое озеро, а 15 гусей полетели дальше.

Таким образом, в стае гусей было 31.

Ответ. 31 гусь.

3.6. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ

При решении некоторых задач бывает полезным использовать так называемый принцип Дирихле: если в n клеток посадить $n + 1$ зайца, то хотя бы в одной клетке будет находиться самое меньшее 2 зайца.

Задача 259. В классе 30 учеников. Можно ли утверждать, что:

а) по крайней мере 5 учеников родились в один день недели;

б) по крайней мере 5 учеников родились во вторник? (см. [5, ч. 1], № 264, с. 99).

а) Можно. Так как если бы в каждый из 7 дней недели родилось самое большее 4 ученика, то всего учеников было бы не больше 28, а учеников в классе 30.

б) Нельзя, так как могло так случиться, что все ученики класса родились, например, в четверг.

Задача 260. На три полки поставлено 25 книг так, что на разных полках стоит разное количество книг. Можно ли утверждать, что на одной из полок книг не меньше 10? Может ли быть на одной из полок 12 книг? Можно ли утверждать, что на одной из полок не меньше 11 книг? (см. [5, ч. 1], № 262, с. 99).

Попробуем поставить на полки книги так, чтобы на разных полках было разное количество книг, но чтобы на каждой из них книг было меньше 10. Тогда самое большое количество книг на одной полке — 9, на другую полку можно поставить 8 книг, а на следующую — 7. Всего в этом случае будет поставлено $9 + 8 + 7$, т. е. 24, книги. Если же на какой-либо полке книг еще меньше, то и общее количество книг уменьшится. Таким образом, если на каждой из полок книг меньше 10, то общее количество книг на полках не может быть равно 25, что противоречит условию. Значит, принятое допущение нужно отклонить и принять его отрицание: не на каждой полке книг меньше 10, т. е. есть полка, на которой находится не менее 10 книг.

На одной из полок может быть и большее количество книг. Например, 12, 8 и 5. Так что на одной из полок может быть и 12 книг.

Если на полки поставить 10, 9 и 6 книг, то окажется, что всего книг 25, на разных полках их стоит разное количество, но нет такой полки, на которой находится не менее 11 книг. Поэтому утверждать, что на одной из полок не меньше 11 книг, нельзя.

Задача 261. В каждом из 75 ящиков лежит не более 17 предметов. Докажите, что по крайней мере в 5 ящиках лежит одинаковое количество предметов (см. [5, ч. 2], № 764, с. 103).

Если допустить, что пустых ящиков не больше 4, ящиков с 1 предметом не больше 4, ящиков с 2 предметами не больше 4, и т. д., ящиков с 17 предметами не больше 4, то общее количество ящиков будет не больше $18 \cdot 4$, т. е. 72, а ящиков по условию 75. Значит, сделанное допущение нужно отклонить и принять его отрицание: есть не менее 5 ящиков, которые содержат одинаковое количество предметов.

3.7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНВАРИАНТА

Инвариант — характеристика, которая не изменяется в определенном процессе. Например, инвариантом является четность значения выражения, содержащего действия сложения и вычитания, в котором часть знаков «+» заменяют знаками «–», а часть знаков «–» — знаками «+».

Задача 262. Есть набор из 20 кружков и 45 треугольников. Два одинаковых предмета из набора можно заменить одним кружком, а два разных — треугольником. Может ли после нескольких таких замен остаться один кружок? (см. [5, ч. 2], № 888, с. 144).

Обратим внимание на то, как изменяется количество кружков и треугольников, если выполнять разные замены, о которых говорится в условии задачи.

Если взять два кружка, то их заменяют одним кружком. В результате количество треугольников не изменится, а количество кружков уменьшится на 1.

Если взять два треугольника, то их заменяют одним кружком. В результате количество треугольников уменьшится на 2, а количество кружков увеличится на 1.

Если взять 1 кружок и 1 треугольник, то их заменяют одним треугольником. В результате количество треугольников не изменится, а количество кружков уменьшится на 1.

Таким образом, при любых действиях количество треугольников или не изменяется, или уменьшается на 2. Если из числа 45 вычитать двойки, то в результате будут получаться нечетные числа, а число 0 получить невозможно. Поэтому после ряда замен останется один треугольник.

Ответ. Нет.

В ряде задач используются свойства деления на число суммы, разности, произведения, свойства остатков.

Задача 263. У продавца было 6 ящиков с вишнями массами 15 кг, 16 кг, 18 кг, 19 кг, 20 кг, 31 кг. Два покупателя взяли 5 ящиков, причем один взял вишен по массе вдвое больше другого. Какой ящик остался? (см. [5, ч. 2], № 797, с. 114).

Если один покупатель взял вишен по массе вдвое больше второго, то масса взятых ими вишен выражается числом, кратным трем. В шести ящиках было $15 + 16 + 18 + 19 + 20 + 31$, т. е. 119, кг. Определим, какой ящик мог остаться.

119 – 15 = 104 — число не кратно 3,
119 – 16 = 103 — число не кратно 3,
119 – 18 = 101 — число не кратно 3,
119 – 19 = 100 — число не кратно 3,
119 – 20 = 99 — число кратно 3,
119 – 31 = 88 — число не кратно 3.

Получается, что масса купленных вишен выражается числом, кратным трем, только если куплено 99 кг вишен. Значит, если остался один ящик, то это мог быть только ящик в 20 кг.

Проверим, что могло так случиться, что в ящиках одного покупателя было 33 кг вишен, а в ящиках другого — 66 кг: 33 = 15 + 18, 66 = 16 + 19 + 31.

Ответ. 20 кг.

3.8. ЗАДАЧИ-ИГРЫ

В ряде задач предлагается проанализировать игру и выяснить, кто из двух игроков имеет выигрышную стратегию, т. е. может довести игру до победы при любых ходах соперника. Понятно, что эти задания можно вначале рассматривать как просто игры. Интерес к ним сохраняется до того времени, пока не будет найдена выигрышная стратегия.

Задача 264. В игру «Назови 100» играют вдвоем. Первый называет число от 1 до 9, второй прибавляет к названному свое число от 1 до 9 и называет сумму, первый к названной сумме добавляет свое число от 1 до 9 и т. д. Выигрывает тот, кто первым получит 100. Как выиграть? (см. [5, ч. 1], № 182, с. 71—72).

В этой игре выиграет тот, кто назовет 90, так как после этого он сможет назвать 100 независимо от того, какое число назовет его соперник. А чтобы назвать 90, нужно назвать 80. Рассуждая так же, получаем, что выиграть сможет тот, кто первым назовет число 10. А это всегда может сделать второй игрок.

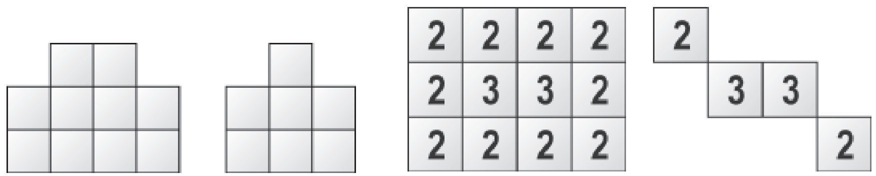
Таким образом, у второго игрока есть возможность выиграть, если называть числа 10, 20, 30 и т. д. после любого хода первого. Если же второй хотя бы раз отступит от этой стратегии, то первый сможет назвать круглое число и довести игру до выигрыша.

3.9. НАГЛЯДНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

При решении геометрических задач используются некоторые свойства известных учащимся фигур.

Задача 265. Дети сложили из кубиков такую фигуру, что если посмотреть на нее спереди, то видно 10 кубиков, а если сбоку, — 7 (рис. 71, *а*). Какое наибольшее количество кубиков могло быть использовано для такой фигуры? Какое наименьшее? Сколько кубиков может содержать эта фигура? Ответ запишите с помощью двойного неравенства (см. [5, ч. 1], № 151, с. 58—59).

Нетрудно заметить, что условию задачи удовлетворяет фигура, состоящая из 12 столбиков кубиков. На рисунке 71, *б* показан вид этой фигуры сверху (число в квадратике показывает количество кубиков в соответствующем столбце). Если к этой фигуре добавить хотя бы один кубик, то вид спереди или сбоку полученной фигуры будет отличаться от того, который представлен на рисунке 71, *а*. Поэтому составленная фигура может иметь самое большее 26 кубиков. Понятно, что меньше 10 кубиков фигура иметь не может, поскольку если смотреть на фигуру спереди, то видно 10 куби-



а *б* *в*

Рис. 71

ков. Рисунок 71, *в* показывает, что фигура может состоять из 10 кубиков.

Поэтому количество n кубиков, из которых состоит фигура, удовлетворяет двойному неравенству $10 \leqslant n \leqslant 26$.

Задача 266. Как разрезать квадрат, показанный на рисунке 72, *а*, на 4 одинаковые по форме и по размерам части так, чтобы каждая из них содержала по одному закрашенному квадратику? (см. [5, ч. 2], № 927, с. 155).

Поскольку после разрезания из данного квадрата должно получиться 4 равные фигуры, то площадь каждой из полученных фигур должна быть равной 4.

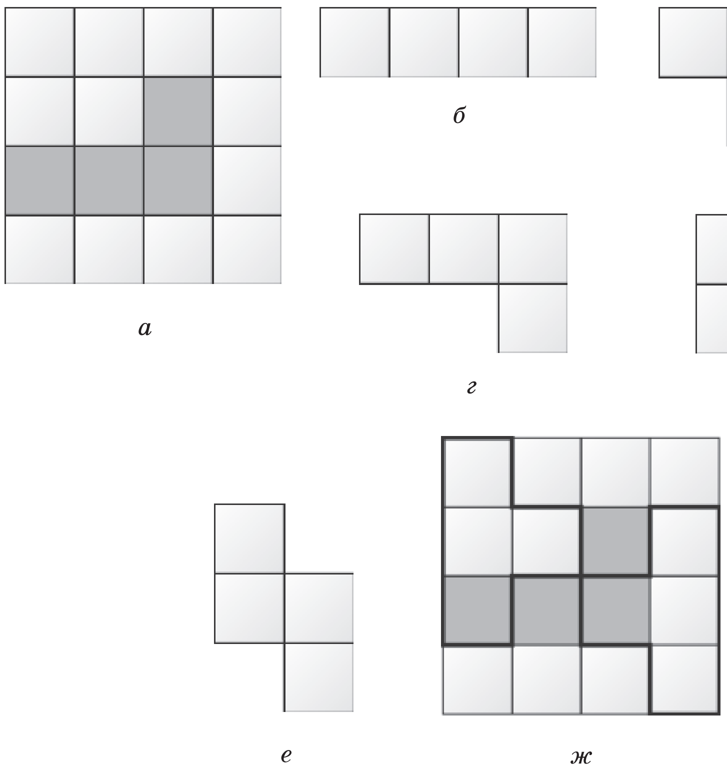


Рис. 72

Из четырех квадратиков можно составить фигуры, показанные на рисунках 72, *б*; 72, *в*; 72, *г*; 72, *д*; 72, *е*.

Четырьмя фигурками, показанными на рисунке 72, *е*, нельзя закрыть квадрат со стороной 4.

Нетрудно увидеть, что, разделив квадрат на полоски, показанные на рисунке 72, *б*, или на квадраты, показанные на рисунке 72, *д*, справиться с выполнением условия задачи невозможно: всегда будет полоска или квадрат без закрашенного квадратика.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что с выполнением условия задачи исходный квадрат нельзя разделить и на четыре фигурки, показанные на рисунке 72, *г*.

На рисунке 72, *ж* показано, как можно разделить данный квадрат на 4 равные фигурки, каждая из которых содержит по одному закрашенному квадратику.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чичигин, В. Г.* Методика преподавания арифметики : для учительских институтов / В. Г. Чичигин. — М. : Учпедгиз РСФСР, 1952. — 312 с.

2. *Березанская, Е. С.* Методика арифметики : пособие для учителей / Е. С. Березанская. — М. : Учпедгиз РСФСР, 1955. — 542 с.

3. *Егоров, Ф. Е.* Методика арифметики / Ф. Е. Егоров. — М. : Издание книжного магазина «Начальная школа» Е. Н. Тихомировой, 1893. — 288 с.

4. *Тоом, А.* Между детством и математикой : Текстовые задачи в математическом образовании [Электронный ресурс] / А. Тоом. — Режим доступа : http://www.shevkin.ru/?action=Page&ID=294. — Дата доступа : 08.01.2015.

5. *Латотин, Л. А.* Математика : учеб. пособие для 5-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения: в 2 ч. / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2013.

6. *Латотин, Л. А.* Сборник задач по математике: учеб. пособие для 5-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2012. — 248 с.

7. *Куцаў, А. В.* Тэкставыя задачы з адной велічынёй / А. В. Куцаў // Матэматыка : Праблемы выкладання. — 2007. — № 3. — С. 30—38.

8. *Куцаў, А. В.* Пра класіфікацыю тэкставых задач з прапарцыянальнай залежнасцю велічынь / А. В. Куцаў // Матэматычная адукацыя : сучасны стан і перспектывы : зборнік матэрыялаў міжнароднай навуковай канферэнцыі. — Магілёў : МДУ імя А. А. Куляшова, 2003. — С. 88—89.

9. *Латотин, Л. А.* Математика : учеб. пособие для 8-го кл. учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2015. — 407 с.

10. *Латотин, Л. А.* Решаем нестандартные задачи : 5-й кл. / Л. А. Латотин, И. И. Ситкевич, Б. Д. Чеботаревский. — Минск : Народная асвета, 2005. — 143 с.

11. *Казаков, В. В.* Развивающая математика : 5—6 классы / В. В. Казаков. — Минск : Аверсэв, 2012. — 172 с.

12. *Вакульчик, П. А.* Нестандартные и олимпиадные задачи по математике / П. А. Вакульчик. — Минск : УниверсалПресс, 2004. — 352 с.

13. *Казаков, В. В.* Математика 5 : задачи повышенной сложности и текстовые задачи : рекомендации по решению / В. В. Казаков. — Минск : Аверсэв, 2005. — 237 с.

Содержание

Учебное издание

Латотин Леонид Александрович
Чеботаревский Борис Дмитриевич
Куцев Андрей Викторович

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ В 5 КЛАССЕ

Пособие для учителей
учреждений общего среднего образования
с белорусским и русским языками обучения

Нач. редакционно-издательского отдела *Г. И. Бондаренко*
Редактор *Н. Н. Мамчиц*
Обложка художника *М. Е. Шкурпит*
Компьютерная верстка *А. Н. Киселева*
Корректоры *Е. В. Шобик, В. П. Шкредова*

Подписано в печать 00.00.2016. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 00,00. Уч.-изд. л. 0,00.
Тираж 2000 экз. Заказ

Научно-методическое учреждение «Национальный институт образования»
Министерства образования Республики Беларусь.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/263 от 02.04.2014.
Ул. Короля, 16, 220004, г. Минск

ОАО «Промпечать». Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/21 от 23.11.2013.
Ул. Черняховского, 3, 220049, г. Минск